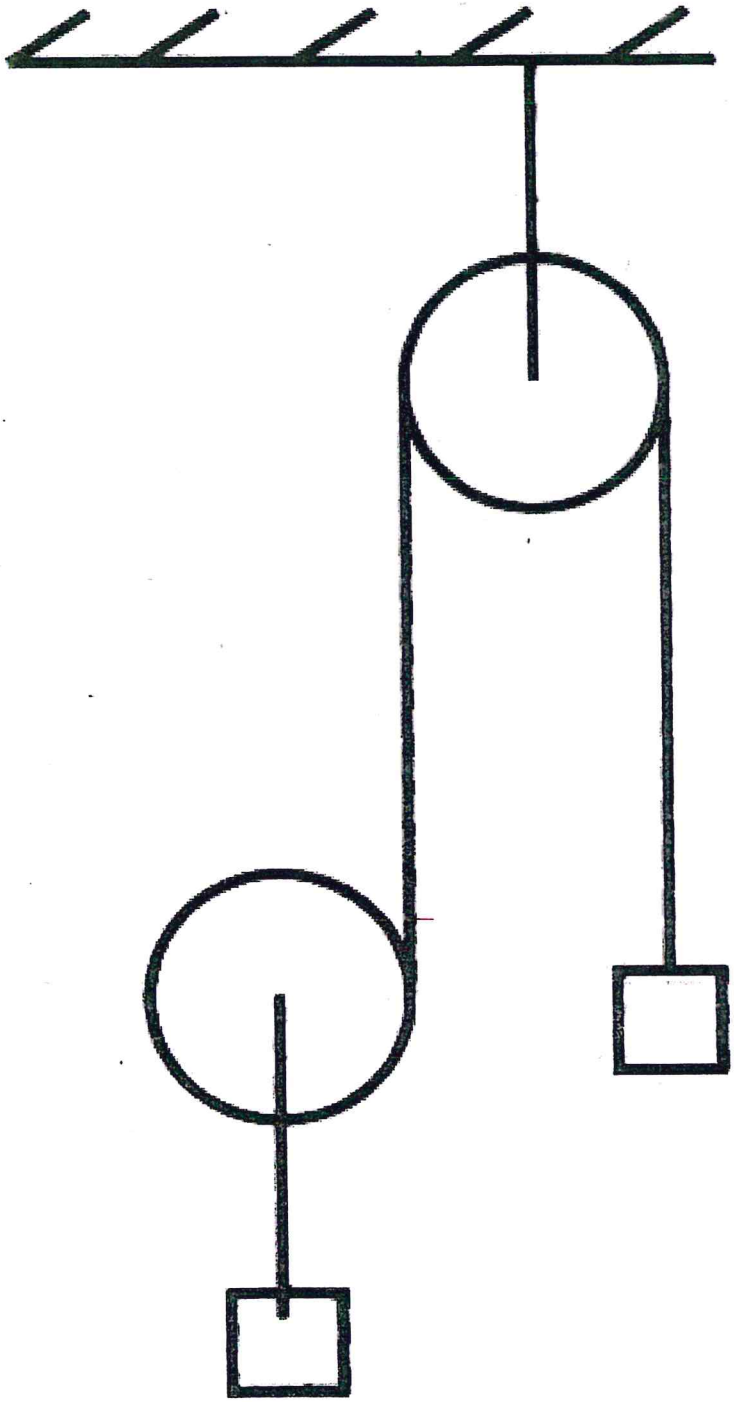
ю. терман



механика

Юрий Абрамович Терман (1928-1996) более сорока лет преподавал физику старшеклассникам, продолжив эту деятельность и после переезда в Израиль.

Вниманию читателей предлагается учебная книга "Механика", написанная доктором Юрием Терманом. Эта прекрасная книга не заменяет собой солидного учебника по соответствующему разделу физики, но служит важным дополнением к такому учебнику. Я не сомневаюсь, что книга станет настольной для каждого, кто имеет склонность к точным наукам, намеревается в будущем заняться исследовательской или инженерной деятельностью и поэтому стремится понять и твердо усвоить физику.

Книга учит тому, как, исходя из общих физических понятий, подходить к формулированию и решению конкретных технических и физических задач, встречающихся в самых разнообразных сферах человеческой деятельности. И, что не менее важно, как убедиться в том, что полученное решение правильно, не искажено из-за неверно сформулированных исходных положений или в результате допущенных вычислительных ошибок.

Педагогический талант доктора Термана позволил ему произвести такой подбор предлагаемых в книге задач и так доступно объяснить методику их решения, что при этом обеспечивается у учеников формирование глубокого понимания физической сущности механики и умение доводить численные вычисления решаемой задачи до конечного результата. Развиваемая в книге методология обеспечила Юрию Терману успешную подготовку большого числа его учеников к школьным и институтским экзаменам по физике. Но еще важнее то, что он прививал своим ученикам любовь к физике, основанную на понимании предмета и умении самостоятельно решать разнообразные практические задачи. Уверен, что эта книга будет способствовать более углубленному изучению физики и любви к предмету новым поколением учащейся молодежи.

Профессор Р.Е. Ровинский

ю. терман

механика

пособие для учащихся старших классов и студентов высших учебных заведений

Библиотека Матвея Черного
ТЕЛЬ-АВИВ • 2001

Терман Ю.А. *Механика. Учебное пособие.*

ISBN - 965 - 7094 - 35 - 6

e-mail for contacts: terman@sii.org.il

Учебное пособие посвящено разделу общей физики - механике и состоит из девяти глав:

Кинематика,
Динамика,
Закон всемирного тяготения,
Проверка результатов решения задач в физике,
Работа, мощность, энергии,
Закон сохранения энергии,
Импульс силы, импульс тела, импульс системы тел,
Гармонические колебания,
Статика.

Представлены основные разделы классической механики в виде теоретического введения и серии задач по каждому из них (всего в пособии 60 задач). Особое внимание уделено рекомендациям и описанию способов решения задач.

Комплекс
редакционных
и издательских услуг
Библиотека Матвея Черного
03-6316469 ☎ 058-587037, 058-316670

Адрес в интернете **http://join2day.com/~tcherny/**

Электронная почта **match99@mail.ru** *или* **tcherny@join2day.com**

Printed in Israel
2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....5
ВВЕДЕНИЕ.....6
1. КИНЕМАТИКА.....7
Задачи к разделу 1 и их решения.....12
Задача 1-1.....12
Задача 1-2.....19
Задача 1-3.....22
Задача 1-4.....13
Задача 1-5.....25
Задача 1-6.....27
Задача 1-7.....30
Задача 1-8.....32
Задача 1-9.....34
О понятии "средняя скорость движения".....36
Задача 1-10.....37
Задача 1-11.....39
Задача 1-12.....40
Кинематика кругового движения материальной точки.....43
Задача 1-13.....45
Задача 1-14.....46
2. ДИНАМИКА.....49
Задачи к разделу 2 и их решения.....52
Задача 2-1.....52
Задача 2-2.....53
Задача 2-3.....55
Задача 2-4.....57
Задача 2-5.....59
3. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ.....61
Задачи к разделу 3 и их решения.....63
Задача 3-1.....63
Задача 3-2.....66
Дополнение к разделу 3.....67
4. ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ФИЗИКЕ.....69
Задачи к разделу 4 и их решения.....70
Задача 4-1.....70
Задача 4-2.....72
Задача 4-3.....73
Задача 4-4.....75
5. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ.....77
Задачи к разделу 5 и их решения.....85
Задача 5-1.....85
Задача 5-2.....86
Задача 5-3.....89

Задача 5-4 90
Задача 5-5 92
Задача 5-6 92
Задача 5-7 94
Задача 5-8 95
Задача 5-9 98
Задача 5-10 99

6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ 100

Задачи к разделу 6 и их решения 107
Задача 6-1 107
Задача 6-2 109
Задача 6-3 110
Задача 6-4 112
Задача 6-5 114
Задача 6-6 115
Задача 6-7 117
Задача 6-8 118

7. ИМПУЛЬС СИЛЫ, ИМПУЛЬС ТЕЛА (МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ), ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ ТЕЛ 121

Задачи к разделу 7 и их решения 123
Задача 7-1 123
Задача 7-2 125
Задача 7-3 126
Задача 7-4 129
Задача 7-5 130
Задача 7-6 132
Задача 7-7 134
Задача 7-8 136
Задача 7-9 138
Задача 7-10 140

8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ 142

Задачи к разделу 8 и их решения 148
Задача 8-1 148
Задача 8-2 151
Задача 8-3 153
Задача 8-4 156
Задача 8-5 158
Задача 8-6 160
Задача 8-7 161
Задача 8-8 164

9. СТАТИКА 167

Задачи к разделу 9 и их решения 169
Задача 9-1 169

Использованная Литература 171

ПРЕДИСЛОВИЕ

Юрий Абрамович Терман (1928-1996), окончил Горьковский (ныне Нижегородский) государственный университет по специальности “физика твёрдого тела” и много лет работал в закрытом научно-исследовательском институте, руководя лабораторией рентгено-структурного анализа полупроводниковых материалов. Однако, будучи, что называется, “педагогом от Бога”, он всё свободное время с энтузиазмом и удовольствием обучал физике школьников-старшеклассников самого разного уровня подготовки – и отстающих, и будущих медалистов, разрабатывая для каждого индивидуальную программу. Не было случая, чтобы труд его не увенчался успехом.

В последние годы уже тяжело больной Ю.А. решил создать учебное пособие, в котором он смог бы сконцентрировать свой огромный опыт преподавания основ физики. К сожалению, ему не было суждено осуществить свой план полностью.

Вниманию читателей предлагается основополагающий раздел физики “Механика”. В книге собраны многочисленные задачи, даны подробные объяснения путей их решения, анализ полученных результатов.

Мы надеемся, что это пособие поможет многим молодым людям расширить свои знания и усовершенствоваться на выбранном пути.

Мы благодарны друзьям, прочитавшим рукопись и сделавшим важные замечания – профессору Р. Ровинскому, профессору К. Штивельману, доктору Б. Ширеру и редактору А. Воробьевой.

Жена, сын, дочь – Лилия, Михаил и Нелли Терман.

ВВЕДЕНИЕ

Механика – один из разделов физики, в котором изучается механическое движение материальных тел и происходящие при этом взаимодействия. Под механическим движением обычно понимают изменение во времени взаимного положения тел или их частей в пространстве. Школьный курс предусматривает изучение так называемой классической механики, в основе которой лежат законы Ньютона, а объектами изучения являются любые материальные тела, кроме элементарных частиц. Предполагается, что движения совершаются со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Законы движения тел со скоростями, близкими к скорости света, рассматриваются в теории относительности Эйнштейна, а движения элементарных частиц и внутриатомные явления – в квантовой механике.

При изучении движения материальных тел в механике (и в некоторых других разделах физики) введён ряд абстрактных понятий, отражающих те или иные свойства реальных тел. К ним относятся:

1) **Материальная точка** – объект, имеющий пренебрежимо малые размеры в сравнении с некоторым характерным размером, обладающий массой. Например, при изучении закономерностей движения Земли вокруг Солнца, Земля имеет размеры, пренебрежимо малые по сравнению с расстоянием до Солнца. Здесь Земля принимается за материальную точку. Если изучается суточное вращение Земли, то Земля рассматривается не как материальная точка, а как твёрдое тело. Практически тело можно считать материальной точкой в тех случаях, когда оно совершает поступательное движение, т.е. вращательной частью движения можно пренебречь.

2) **Абсолютно твёрдое тело** – это такое тело, расстояние между двумя точками которого остаётся неизменным во времени. Это понятие используют, когда в результате взаимодействия можно пренебречь деформацией тела.

Механику делят на механику материальной точки, механику системы материальных точек и механику абсолютно твёрдого тела. Эти понятия используются в последующих разделах.

1. КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел механики, изучающий геометрические свойства движения тел без учёта их масс и действующих на них сил.

Движение тела в кинематике рассматривают по отношению к какому – либо телу, называемому телом отсчёта. С телом отсчёта связывают координатные оси. Тело отсчёта с выбранными координатными осями составляют систему отсчёта. В кинематике выбор системы отсчёта произволен. Движение тела на траектории MN (Рис1-1) относительно тела отсчёта O может быть задано радиусом – вектором $\vec{r}$, проведённым из тела отсчёта до тела на траектории. При этом закон движения даётся векторным соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.1)$$

Векторное соотношение (1.1), позволяющее определить положение тела на траектории в любой момент времени при любом характере движения, называется уравнением движения в векторной форме.

Если система отсчёта содержит три взаимно перпендикулярные оси (декартова система), то проектируя на эти оси соотношение (1.1), получим три скалярных уравнения, задающих движение тела:

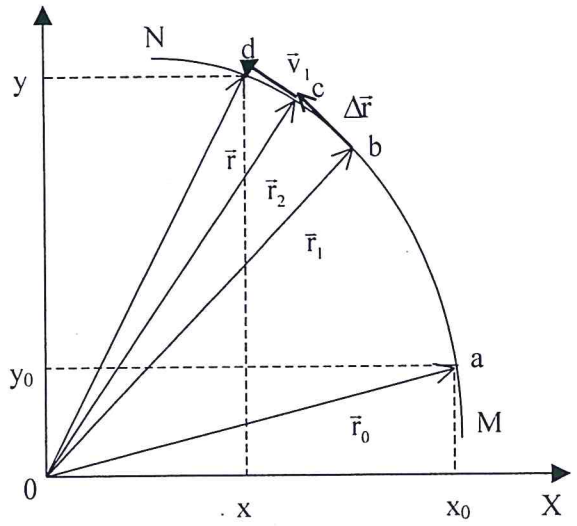


Рис.1-1. Движение тела по траектории MN.
a, b, c, d – положение тела в различные моменты времени.
a – начало отсчета времени (t=0)
$\vec{r}_0$, $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ - радиус-вектор в различные моменты времени
O – тело отсчета

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \qquad (1.2)$$

Рассмотрим основные кинематические характеристики.

Траектория – непрерывная линия, которую описывает тело при своём движении. Если траектория – прямая линия, движение тела называется прямолинейным; если траектория – кривая линия, движение называется криволинейным.

Тело отсчёта – произвольно выбранное тело, по отношению к которому изучается движение данного объекта. С телом отсчёта связывают оси координат, например, декартову систему осей x, y, z. Совокупность тела отсчёта, координатных осей и устройства для измерения интервалов времени составляет систему отсчёта.

Радиус-вектор $\vec{r}$ (Рис.1-2) определяет положение тела на траектории по отношению к телу отсчёта. Радиус-вектор проводится от начала отсчёта до движущегося тела.

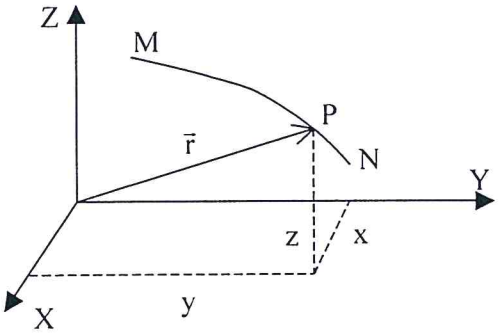


Рис. 1-2. Движение тела по траектории MN в декартовой системе координат.
O – тело отсчёта
MN – траектория движения
$\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый из тела отсчёта в точку P с координатами x, y, z.

Перемещение – вектор $\Delta\vec{r}$ (Рис.1-3), соединяющий два положения тела на траектории P и Q, отвечающих интервалу времени Δt. $\Delta\vec{r}$ направлен вдоль хорды PQ.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

В общем случае, когда траектория криволинейна, перемещение не совпадает с соответствующим участком траектории. Но если взять достаточно малое перемещение, то с требуемой степенью точности можно заменить малый участок траектории её хордой. Такое достаточно малое перемещение $\Delta\vec{r}$ называется **элементарным перемещением**.

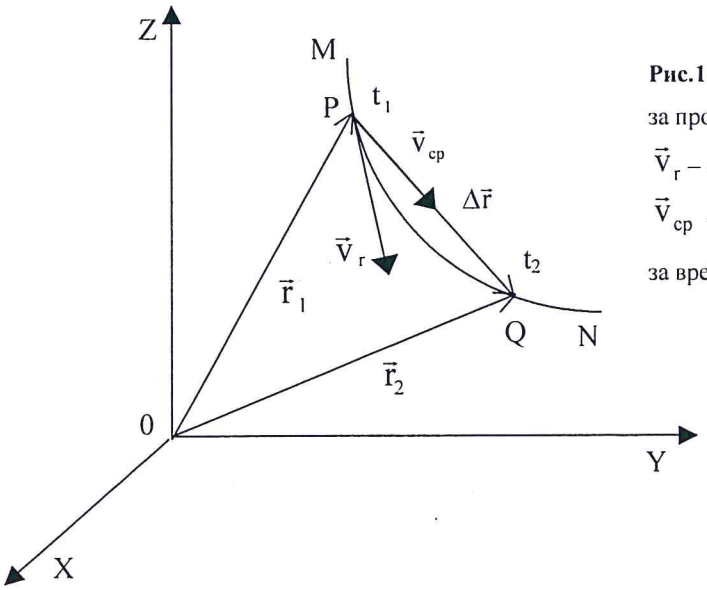


Рис.1-3. Приращение радиуса-вектора $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$
$\vec{v}_r$ – скорость в точке P.
$\vec{v}_{cp}$ – средняя скорость на участке траектории PQ за время $\vec{v}_n$.

Если проекции вектора $\Delta\vec{r}$ по трём осям x, y, z равны соответственно $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то модуль перемещения равен:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \qquad (1.3)$$

Скорость – векторная величина $\vec{v}$, равная производной от перемещения по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.4)$$

Направление скорости в данной точке траектории совпадает с направлением касательной в указанной точке. Покажем это.

Пусть элементарное перемещение $\Delta\vec{r}$ произошло за время Δt. Тогда отношение

$$a_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.5)$$

называется средней скоростью за время Δt. Направление вектора $\vec{v}_{cp}$ совпадает с направлением секущей PQ (Рис.1-3).

Отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ зависит от величины Δt. Если мы будем уменьшать Δt, т.е. приближать точку Q к точке P, то отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ будет изменяться. При неограниченном уменьшении Δt отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ будет стремиться к некоторому пределу, который является скоростью точки:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.6)$$

откуда следует (1.4).

Проектируя вектор скорости на координатные оси, получим:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (1.7)$$

где:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (1.8)$$

Что касается направления $\vec{v}$, то оно совпадает с касательной в каждой точке траектории, т.к. при бесконечном дроблении интервала Δt секущая сливается с касательной.

Ускорение $\vec{a}$ - векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора $\vec{v}$ по модулю и по направлению. В общем случае:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.9)$$

Рассмотрим две точки на траектории P и Q. Пусть скорости тела в этих точек равны соответственно $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в моменты времени t_1 и t_2 (Рис.1-4). Изменение скорости за время $\Delta t = t_2 - t_1$ выражается вектором $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Отношение $$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.10)$$

представляет собой среднее значение ускорения за интервал времени Δt около рассматриваемой точки P. Отношение $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ зависит от величины Δt.

По мере уменьшения Δt выясняется, что $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ перестаёт заметно изменяться.

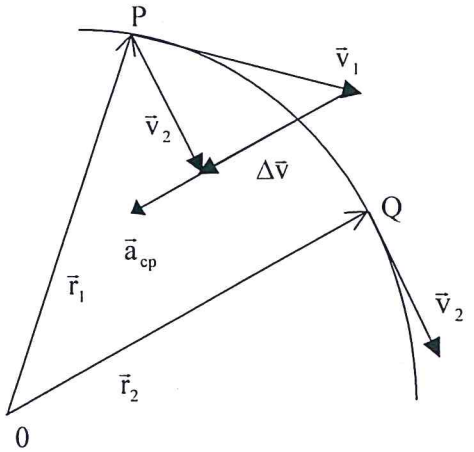


Рис. 1-4.
$\vec{v}_1$ – скорость в точке P в момент t.
$\vec{v}_2$ – скорость в точке Q в момент $t+\Delta t$.
$\Delta\vec{v}$ – изменение скорости за интервал времени Δt.
$\vec{a}_{ср}$ – вектор среднего ускорения (совпадающий по направлению с $\Delta\vec{v}$).

При неограниченном уменьшении Δt указанное отношение стремится к пределу – ускорению тела в точке P.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.11)$$

Направление $\vec{a}$ совпадает с направлением $\Delta\vec{v}$.
Проекции $\vec{a}$ на декартовы оси равны:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad (1.12)$$

Модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.13)$$

Разложим $\vec{a}$ на два взаимно перпендикулярных направления: на направление касательной к траектории в некоторой точке P (Рис. 1-5) и на нормаль к касательной в той же точке. Обе компоненты играют разную роль в изменении скорости движения. Тангенциальная компонента $\vec{a}_\tau$ изменяет скорость по модулю, а нормальная компонента $\vec{a}_n$ изменяет скорость по направлению. Обе компоненты определяются равенствами:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad (1.14)$$

где v – модуль скорости, ρ - радиус кривизны траектории в точке P (Рис. 1-5).
Полное ускорение по модулю равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \qquad (1.15)$$

Направлено $\vec{a}_n$ всегда внутрь траектории, т.е. вдоль радиуса кривизны к центру кривизны траектории.

Из сказанного следует: когда нам известны зависимости координат от времени, то путём их дифференцирования по (1.8) мы можем найти модуль скорости, используя (1.7). Двукратным дифференцированием найдём компоненты ускорения, используя (1.12) и модуль ускорения, согласно соотношению (1.13).

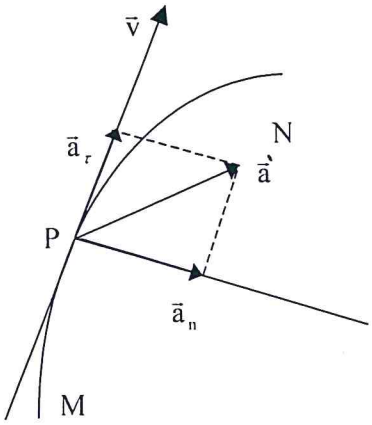


Рис.1-5.
$\vec{v}$ и $\vec{a}$ - скорость и ускорение в точке P траектории MN
$\vec{a}_\tau$ - тангенциальное (касательное) ускорение.
$\vec{a}_n$ - нормальное (центростремительное) ускорение.

Наоборот, если известны временные зависимости компонент ускорения, то обратной операцией – интегрированием – мы найдём временные зависимости компонентов скорости и координат. При этом необходимо знать начальные условия, т.е. координаты и скорость в начальный момент времени. Применим полученные результаты для равнопеременного движения.

Равнопеременным называется движение, совершаемое с неизменным вектором ускорения. Поставим общую задачу. Пусть материальная точка движется равнопеременно с заданным ускорением $\vec{a} = \text{const}$. Известны так же начальные условия: в начальный момент времени (t=0) начальная скорость $\vec{v}_0$ и радиус–вектор $\vec{r}_0$. Требуется найти зависимости $\vec{v}(t)$ и $\vec{r}(t)$. Поскольку $\vec{a} = \text{const}$, то, следовательно, все проекции ускорения a_x, a_y, a_z не зависят от времени.

Проведём решение для a_x.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$dv_x = a_x dt$$

$$v_x = \int a_x \cdot dt = a_x \cdot t + c_1,$$

где c_1 - некоторая константа интегрирования, которая определяется из знания начальных условий. Известно, что $v_x=v_{0x}$ при t=0. Подставляя их в последнее равенство, получим: $c_1=0$.

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t \qquad (1.16)$$

Поскольку $v_x = \frac{dx}{dt}$, найдём зависимость координаты x от времени:

$$dx = v_x \cdot dt = v_{0x} dt + a_x \cdot t \cdot dt$$

$$x = \int v_{0x} dt + \int a_x \cdot t \cdot dt = v_{0x} t + a_x \frac{t^2}{2} + c_2,$$

где c_2 - вторая константа интегрирования. Для её нахождения учтём, что $x = x_0$ при t=0. Подставляя в последнее равенство, получим: $c_2 = x_0$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad (1.17)$$

Проведя аналогичные решения для осей y и z, получим кинематические уравнения равнопеременного движения в проекциях на координатные оси:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} \\ z = z_0 + v_{0z}t + \dfrac{a_z t^2}{2} \\ v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \\ v_z = v_{0z} + a_z t \end{cases} \qquad (1.18)$$

Зная зависимости от времени проекций скорости и координат, можно написать кинематические уравнения равнопеременного движения в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases} \qquad (1.19)$$

Задачи к разделу 1 и их решения

Задача 1-1

Камень, брошенный вертикально вверх, совершает свободное падение. Начальная скорость камня на исходном уровне (уровне бросания) $v_0 = 10$ *м/с*.

1) Через сколько времени камень достигнет исходного уровня? Какова скорость камня в момент достижения исходного уровня? Какой максимальной высоты он достигнет и через сколько времени?

2) Через сколько времени камень будет на высоте d=2 *м*. Какова его скорость на этой высоте?

3) В момент, когда камень (в дальнейшем будем называть его камень 1) достигнет максимальной высоты, с исходного уровня брошен вверх с той же начальной скоростью камень 2. На какой высоте они встретятся? Через сколько времени, считая с момента броска камня 2, произойдёт эта встреча? Каковы скорости камней в момент встречи?

4) Вычертить графики временных зависимостей:

- проекции ускорения $a_x(t)$,
- проекции скорости $v_x(t)$,
- координаты $x(t)$,
- пройденного пути $L(t)$
- от момента броска камня 1 до момента его возвращения на исходный уровень.

5) Построить графически те же зависимости движения обоих камней от момента броска камня до момента встречи.

Решение задачи 1-1

1) Выберем систему отсчёта Ox так, что тело отсчёта совпадает с начальным положением камня, а ось x направлена вертикально вверх. Радиус-вектор начального положения $\vec{r}_0 = \vec{0}$, поскольку тело отсчёта совмещено с начальным положением тела. Так же $\vec{r} = \vec{0}$, т.к. конечное положение камня совмещено с начальным (Рис.1-6).

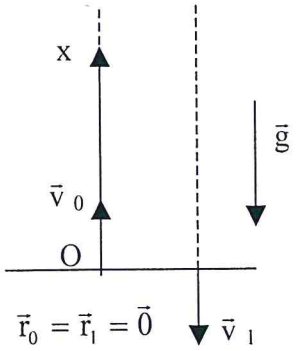


Рис. 1-6.
Ox – система отсчёта
$\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$ - начальная и конечная скорости на начальном уровне.
$\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$ - радиусы-векторы начального и конечного положений тела.

Кинематические уравнения в векторах:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2} \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

согласно (1.19) для равнопеременного движения, т.к. при свободном падении камня $\vec{g} = \text{const}$. Для простоты примем $g = 10$ *м/с²*.

Движение происходит вдоль вертикали, т.е. описывается двумя уравнениями в проекциях на ось x, согласно выражениям (1.18):

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ v_x = v_{0x} + a_x t \end{cases}$$

Система описывает любое равнопеременное движение вдоль оси x. В нашем случае система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0 = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} \\ -v_1 = v_0 - gt \end{cases}$$

где t – полное время полёта камня. Из первого уравнения следует:

$$t\left(v_0 - \frac{gt}{2}\right) = 0$$

Корень t=0 выражает момент броска и в данном случае не представляет интереса. Второй корень даёт решение:

$$t = \frac{2v_0}{g}; t = 2\ c$$

Из второго уравнения получим v_1, подставив значение для t:

$$-v_1 = v_0 - g \cdot \frac{2v_0}{g}$$

Откуда: скорость $v_1 = v_0; v_1 = 10$ *м/с* и направлена вертикально вниз.

Здесь и в последующих задачах, проецируя векторные уравнения на оси, мы учитываем, пользуясь чертежом, знаки проекций. Поэтому из уравнений могут быть найдены модули искомых физических величин, а их направление определяются из чертежа, например $\vec{v}_1$ на Рис. 1-6

Для определения максимальной высоты подъёма H воспользуемся рисунком 1-7.

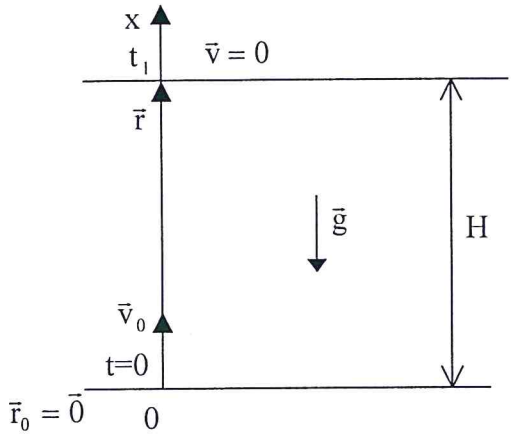


Рис. 1-7.
$\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый из начального уровня к предельно-достижимому.
H – максимальная высота подъёма тела.

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} H = v_0 t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2} \\ 0 = v_0 - g t_1 \end{cases}$$

где t_1 - время полёта камня до крайней верхней точки.

$$t_1 = v_0/g; \quad t_1 = t/2 = v_0/g = 1 \text{ с}$$
$$H = v_0^2/g - g v_0^2/2g^2 = v_0^2/2g = 5 \text{ м}$$

Таким образом, при свободном падении камень, брошенный вертикально вверх со скоростью v_0=10 *м/с* при g=10 *м/с* ^{2}, достигает максимальной высоты H=5 *м* за время t_1=1*с*. Полное время движения камня t=2 *с*.

2) Определим время достижения высоты d (Рис. 1-8).

Система рабочих уравнений:

$$\begin{cases} d = v_0 \tau - \dfrac{g \tau^2}{2} \\ u = v_0 - g\tau \end{cases}$$

где τ время достижения высоты d; u – скорость камня на высоте d.

Решая систему, получим два значения τ и, соответственно, два значения u:

$$\tau_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gd}}{g} \qquad \tau_1 = 0{,}25c$$

$$\tau_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gd}}{g} \qquad \tau_2 = 1{,}75c$$

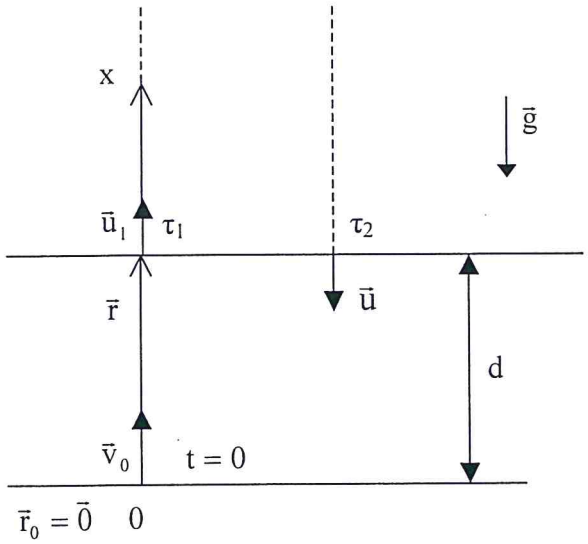


Рис. 1-8. К определению времени достижения определённой высоты d.
τ_1 и τ_2 – времена достижения заданной высоты уровня d.
$\vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий местоположение выбранного уровня.

Проверка 1: $\tau_1 + \tau_2 = t = 2$ *с*

$$u_1 = v_0 - g\tau_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gd}$$
$$-u_2 = v_0 - g\tau_2 = -\sqrt{v_0^2 - 2gd}$$
$$u_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gd}$$

$$u_1 = u_2 = 7{,}75 \text{ м/с}$$

На высоте d=2 *м* камень побывал дважды: при подъёме в момент τ_1=0,25 *с* и в момент τ_2=1,75 *с* при спуске. Из выражений для τ_1 и τ_2 следует:

$$v_0^2 - 2gd \geq 0$$
$$d \leq \frac{v_0^2}{2g}$$

Проверка 2: Если $v_0^2 - 2gd = 0$, тогда $\tau_1 = \tau_2 = \frac{v_0}{g} = 1$ *с*. Это совпадает с моментом достижения камнем максимальной высоты подъёма и d=h=5 *м*.

Скорости камня $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ на высоте d равны по модулю $u_1 = u_2 = 7{,}75$ *м/с* и направлены в противоположные стороны. Равенство модулей скоростей справедливо для любого d, а численное значение их уменьшается с ростом d, принимая нулевое значение при d=H.

3) Рассмотрим движение двух камней. Начнём с момента, когда камень 1 находится в крайнем верхнем положении, а камень 2 – на исходном уровне. Камни одновременно начинают движение и встречаются на уровне h от исходного (Рис.1-9).

Их кинематические уравнения в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01} \cdot t_1 + \dfrac{\vec{g}t_1^2}{2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02} t_2 + \dfrac{\vec{g}t_2^2}{2} \end{cases}$$

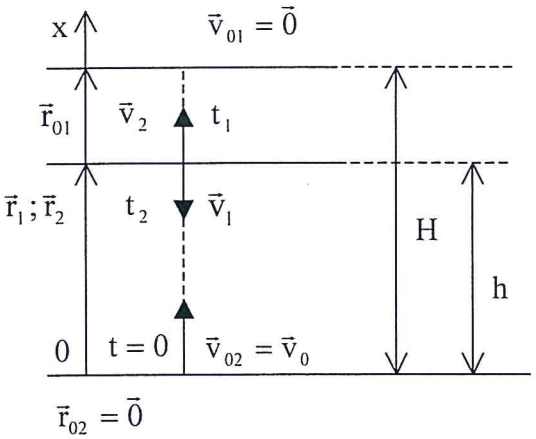


Рис.1-9.
t_1 и t_2 - времена движения тела 1 и тела 2 до их встречи.
$\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ - радиусы-векторы начального положения тела 1 и тела 2.
$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиусы-векторы тел 1 и 2, проведённых из начального уровня до уровня встречи.
$\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ - начальные скорости тела 1 и тела 2.
$\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - скорости тел в момент встречи.
H – максимальная высота.
h – высота уровня встречи.

(Обозначение векторов указаны на рисунке 1-9)

Обратим внимание на факт равенства векторов $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Это объясняется выбором единого тела отсчёта и фактом встречи двух тел.
Учитывая: $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$; $|\vec{r}| = h$; $t_1 = t_2 = t$; $v_{01} = 0$; $v_{02} = v_0$, получим после проецирования на ось x:

$$\begin{cases} h = H - \dfrac{gt^2}{2} \\ h = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$H = v_0 t\,;\ t = \frac{H}{v_0} = \frac{v_0}{2g} = \frac{t_1}{2}\,;\ \text{т.к.: } H = \frac{v_0^2}{g};\ t_1 = \frac{v_0}{g} \text{ (см. пункт 1).}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\cdot\frac{v_0^2}{4g^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{v_0^2}{g} = \frac{3}{4}H$$

Что касается скорости камней в момент их встречи, то, учитывая результаты пункта 2 в момент $t = \dfrac{t_1}{2}$ скорости равны по модулю, противоположно направлены и составляют половину начальной скорости движения камня 2:

$$v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2}$$

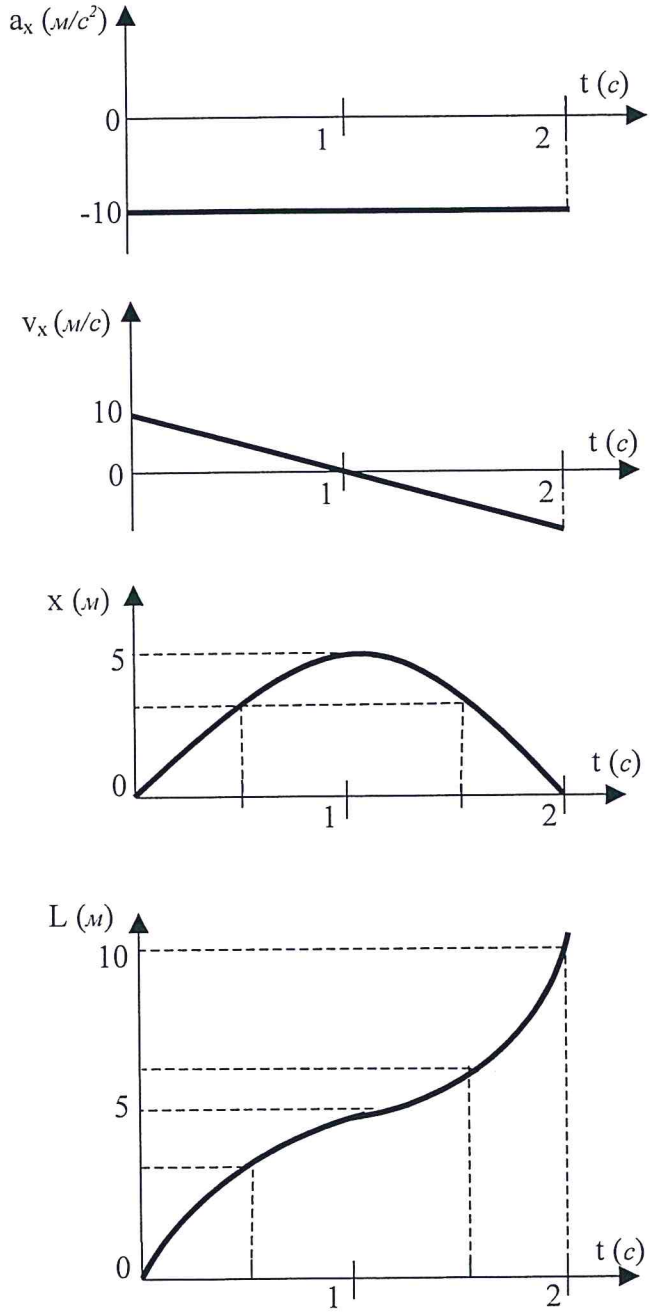


Рис. 1-10
Зависимости от времени проекций ускорения, проекций скорости, координаты и пройденного пути по результатам расчётов (таблица 1-1)

Таблица 1-1.
Расчётные данные к рисунку 1-10.

t (с)	a_x (м/с²)	v_x (м/с)	x (м)	L (м)
0	-10	10	0	0
0,5		5	3,75	3,75
1		0	5	5
1,5		-5	3,75	8,75
2		-10	0	10

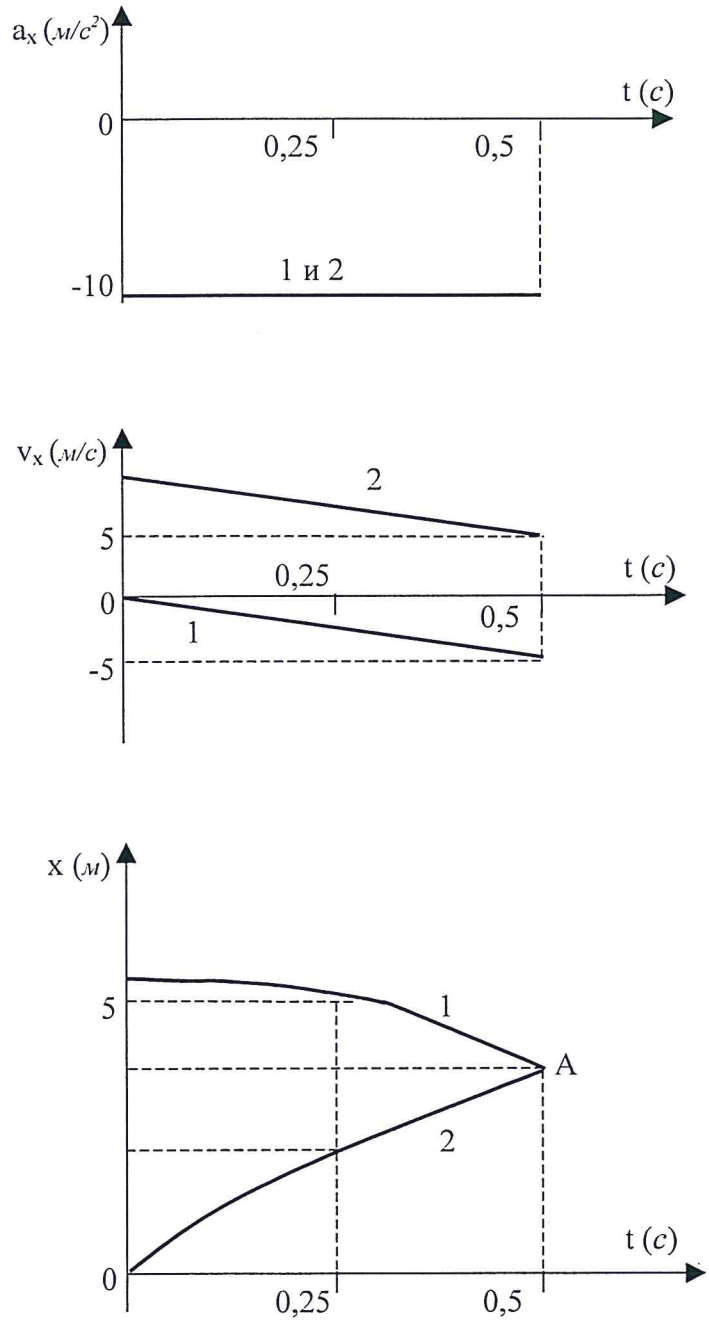


Рис.1-11. Зависимости от времени проекций ускорения, проекций скорости и координат камня 1 и камня 2 до их встречи в точке А (t=0,5 *с*; x=3,75 *м*) по результатам расчётов, сведённых в таблицу 1-2.

Таблица 1-2
Расчётные данные к рисунку 1-11.

t (*с*)	a_x (*м/с²*)	v_{x1} (*м/с*)	v_{x2} (*м/с*)	x_1 (*м*)	x_2 (*м*)
0	– g	0	10	5	0
0,25		-2,5	7,5	4,8	2,3
0,5		5	-5	3,75	3,75

Задача 1-2

Из двух точек, расположенных на одной высоте над поверхностью земли на расстоянии L=8*м* друг от друга, одновременно бросают два камня: первый – вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}_{01} = 4$ *м/с*, второй – горизонтально в сторону первого камня с начальной скоростью $\vec{v}_{02} = 5$ *м/с* Начальные скорости лежат в одной вертикальной плоскости.

Каково минимальное расстояние, d_{min}, между камнями в процессе движения?

Найти время t достижения наименьшего расстояния между камнями.

Какова должна быть высота h, чтобы камни в процессе свободного падения успели максимально сблизиться?

Дано: L = 8 *м*; v_{01} = 4 *м/с;* v_{02} = 5 *м/с.*

Найти: d_{min}; t; h.

Решение задачи 1-2

Выберем систему отсчёта, связанную с землёй, и привяжем её к точке начального положения камня 1. Направления осей показаны на рисунке 1-12. Время отсчёта свяжем с началом движения камней.

На рисунке 1-12 радиус-вектор начального положения камня 1 $\vec{r}_{01} = \vec{0}$, поскольку начальное положение камня 1 совпадает с положением тела отсчёта; $\vec{r}_{02}$ - то же для камня 2; $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиусы-векторы положений камня 1 и камня 2 соответственно в момент их максимального сближения.

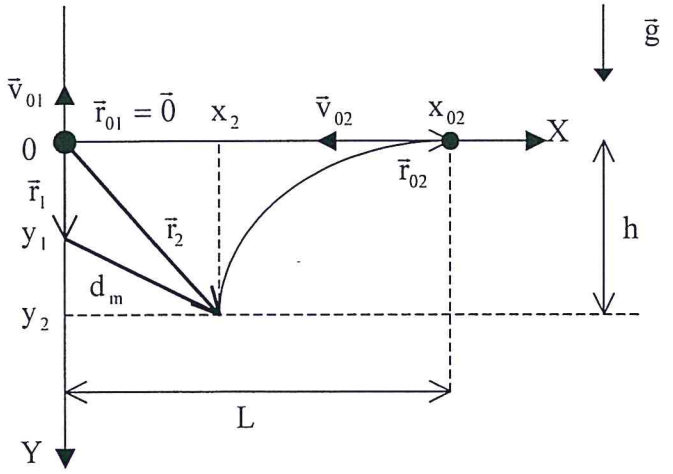


Рис.1-12.
Движение камней в системе отсчёта, связанной с Землёй. Пояснения - в тексте.

Кинематические уравнения в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2} \end{cases}$$

Кинематические уравнения в проекциях на выбранные оси:

$$\begin{cases} +y_1 = -v_{01}t + \dfrac{gt^2}{2} \\ +y_2 = +\dfrac{gt^2}{2} \\ x_2 = L - v_{02}t \end{cases}$$

1) Расстояние между камнями в некоторый момент времени t:

$$d = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ;\ x_2 = L - v_{02}t$$

$$y_2 - y_1 = v_{01}t$$

$$d = \sqrt{(L - v_{01}t)^2 + v_{01}^2 t^2}$$

Взяв производную от подкоренного выражения и приравняв её нулю, получим уравнение для нахождения времени движения камней до момента их максимального сближения:

$$2(L - v_{02}t)(-v_{02}) + 2v_{01}^2 t = 0$$

$$-2Lv_{02} + 2v_{02}^2 t + 2v_{01}^2 t = 0$$

$$t = \frac{L \cdot v_{02}}{v_{01}^2 + v_{02}^2}$$

Величина максимального сближения камней:

$$d_{min} = \sqrt{\left(L - \frac{Lv_{02}^2}{v_{01}^2 + v_{02}^2}\right)^2 + \frac{L^2 v_{02}^2 v_{01}^2}{(v_{01}^2 + v_{02}^2)^2}} = L\sqrt{\frac{v_{01}^4}{(v_{01}^2 + v_{02}^2)^2} + \frac{v_{01}^2 v_{02}^2}{(v_{01}^2 + v_{02}^2)^2}}$$

$$d_{min} = \frac{L \cdot v_{01}}{\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2}}$$

Найдём минимальную высоту начального положения камней, которая даст возможность им в процессе падения достигнуть момента максимального сближения:

$$t = \frac{Lv_{02}}{v_{01}^2 + v_{02}^2} < T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

где T – время падения камня 2 с искомой высоты h. Отсюда требование:

$$h > \frac{gL^2 v_{02}^2}{2(v_{01}^2 + v_{02}^2)^2}$$

Найдём числовые значения в системе СИ:

$$d_{min} = \frac{L \cdot v_{01}}{\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2}} = 5\ м;$$

$$t = \frac{L \cdot v_{02}}{v_{01}^2 + v_{02}^2} \approx 1\ с;$$

$$h > \frac{gL^2 v_{02}^2}{2(v_{01}^2 + v_{02}^2)^2} = 4{,}8\ м$$

2) Повторим решение, выбрав систему отсчёта (СО), связанную с первым камнем (Рис.1-13). Для данной задачи это более рациональная СО, поскольку оба тела совершают движения с ускорением свободного падения $\vec{g}$ в СО, связанной с Землёй.

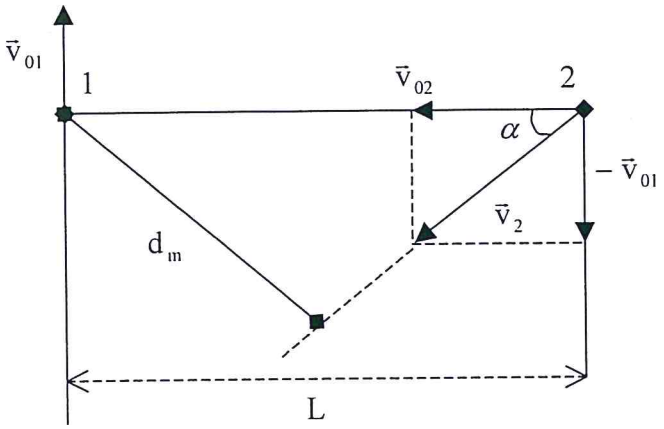


Рис.1-13.
Движение камня 1 и камня 2 в системе отсчёта, связанной с камнем 1. Пояснения - в тексте.

Воспользуемся соотношениями для определения ускорения $\vec{a}_2$ и скорости $\vec{v}_2$ в новой системе, зная $\vec{a}_1$ и $\vec{v}_1$ в СО, связанной с Землёй, а также ускорение $\vec{a}_{21}$ и скорость $\vec{v}_{21}$ новой системы относительно прежней. Для камня 2:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{21} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_{21} = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$$

Для камня 1, с которым связана новая СО, заведомо: $\vec{v}_2 = \vec{0}$ и $\vec{a}_2 = \vec{0}$. Проверим это. Для камня 1:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{21} = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{01} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_{21} = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$$

Таким образом, в новой СО (Рис.1-13) камень 1 покоится. Движение камня 2 будет прямолинейным и равномерным со скоростью $\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01}$.

Наименьшее расстояние между камнями:

$$d_{min} = L \cdot \mathrm{Sin}\alpha = \frac{L \cdot v_{01}}{\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2}};$$

Это произойдёт через время:

$$t = \frac{L \cdot \mathrm{Cos}\alpha}{v_2} = \frac{L \cdot \mathrm{Cos}\alpha}{\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2}} = \frac{L \cdot v_{02}}{v_{01}^2 + v_{02}^2};$$

Необходимо, чтобы к этому моменту времени камень 2 не достиг бы поверхности земли. Т.е. должно быть выполнено условие:

$$\frac{L \cdot v_{02}}{v_{01}^2 + v_{02}^2} < \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Откуда, высота начального положения тел должна быть

$$h > \frac{gL^2 v_{02}^2}{2\left(v_{01}^2 + v_{02}^2\right)^2}$$

Т.о., камни в процессе падения достигнут минимального расстояния между собой $d_{min} = 5$ *м* через время $t \cong \frac{Lv_{02}}{v_{01}^2 + v_{02}^2} \approx 1$ *с*, если высота их начального положения будет: $h > 4{,}8$ *м*.

Задача 1-3

С балкона А (Рис.1-14), расположенного на высоте h=5 *м* от плоскости тротуара, бросают предмет в точку В, находящуюся на расстоянии L=4 *м*, измеренном вдоль горизонтальной плоскости.

1) Чему равна минимальная скорость броска?
2) Под каким углом α к горизонту совершён бросок?
3) С какой скоростью предмет упадёт на горизонтальную поверхность?
4) Чему равен угол падения в точке В?

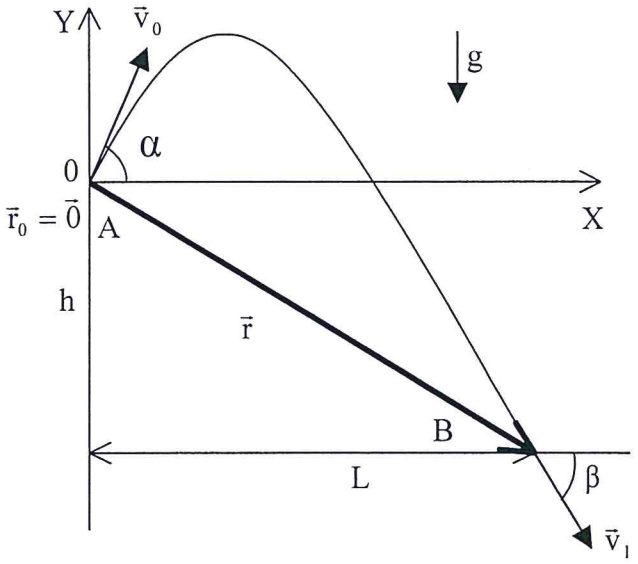


Рис. 1-14. Траектория движения предмета. Пояснения к рисунку – в тексте.

Решение задачи 1-3

Выберем тело отсчёта в точке начального положения тела, т.е. на балконе, а оси расположим, как показано на рисунке 1-14. Проведём радиусы-векторы начального и конечного положений. Кинематические уравнения в векторной форме и в проекциях:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{gt^2}{2} \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = v_0 \mathrm{Cos}\alpha \cdot t \\ -h = v_0 \mathrm{Sin}\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\ v_1 \mathrm{Cos}\beta = v_0 \mathrm{Cos}\alpha \\ v_1 \mathrm{Sin}\beta = v_0 \mathrm{Sin}\alpha - gt \end{cases}$$

Из первых двух уравнений:

$$t = \frac{L}{v_0 \mathrm{Cos}\alpha}$$

$$-h = L \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{L^2}{v_0^2 \mathrm{Cos}^2\alpha}$$

Решим это уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$. Для этого прибавим и отнимем от него $\frac{gL^2}{2v_0^2}$:

$$-h = L \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \mathrm{Cos}^2\alpha} + \frac{gL^2}{2v_0^2} - \frac{gL^2}{2v_0^2};$$

$$\frac{gL^2}{2v_0^2 \mathrm{Cos}^2\alpha} - \frac{gL^2}{2v_0^2} = \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(\frac{1}{\mathrm{Cos}^2\alpha} - 1\right) = \frac{gL^2}{2v_0^2} \cdot \mathrm{tg}^2\alpha$$

$$\frac{gL^2}{2v_0^2} \cdot \mathrm{tg}^2\alpha - L \cdot \mathrm{tg}\alpha + \frac{gL^2}{2v_0^2} - h = 0$$

Решения: $(\mathrm{tg}\alpha)_{1,2} = \frac{v_0^2}{gL} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2L^2} - 1 + \frac{2hv_0^2}{gL^2}}$

Анализируя полученное квадратное уравнение и его решения, отметим, что при данных L и h, а также при данном значении скорости v_0 может реализоваться одна из трёх возможностей: а) v_0 настолько мало, что при любом угле бросания α предмет не долетит до точки B; б) при некотором значении скорости $v_0 = v_{0min}$ (когда дискриминант квадратного уравнения обращается в нуль), существует единственный угол бросания $\alpha = \alpha_0$, обеспечивающий попадание в точку B; в) при скоростях $v_0 > v_{0min}$ попасть в точку B можно по двум траекториям. Нас интересует случай б). Следовательно, приравняв нулю дискриминант решения, получим v_{0min}:

$$\frac{1}{g^2L^2} \cdot (v_{0min})^4 + \frac{2h}{gL^2} \cdot (v_{0min})^2 - 1 = 0$$

$$(v_{0min})^2 = g\left(\sqrt{h^2 + L^2} - h\right)$$

Угол бросания при этом:

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{(v_{0min})^2}{gL} = \frac{g\sqrt{h^2 + L^2} - h}{gL};$$

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = \sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1} - \frac{h}{L};$$

Задача 1-4

Материальная точка начинает двигаться без начальной скорости по прямой с постоянным ускорением $\bar{a}$. Спустя время t_1 после начала её движения, ускорение меняет направление на противоположное, оставаясь неизменным по модулю (Рис.1-15).

1) Через какое время после начала движения точка окажется в исходном положении?
2) Какова скорость точки в этот момент?
3) Изобразить графически движение материальной точки.

Дано: $\vec{v}_0 = \vec{0}$; t_1; a;

Найти: $t = t_1 + t_2$; v_2; $a_x(t)$; $v_x(t)$; $x(t)$.

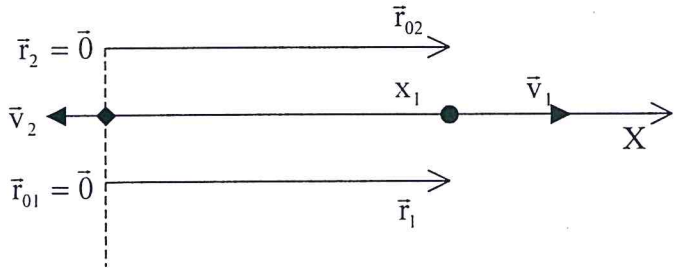


Рис. 1-15.
Пояснения к рисунку – в тексте.

Решение задачи 1-4

Свяжем систему отсчёта с местом начального положения материальной точки. Кинематические уравнения в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t_1 + \dfrac{\vec{a}_1 t_1^2}{2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t_2 + \dfrac{\vec{a}t_2^2}{2} \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{a}_1 t_1 \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{a}_2 t_2 \end{cases}$$

В проекциях на ось x:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{at_1^2}{2} \\ 0 = x_1 + v_1 t_2 - \dfrac{at_2^2}{2} \\ v_1 = at_1 \\ -v_2 = v_1 - at_2 \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$0 = \frac{at_1^2}{2} + at_1 t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

$$t_2^2 - 2t_1 t_2 - t_1^2 = 0$$

$$t_2 = t_1 \pm t_1\sqrt{2}$$

Ответ получается однозначным, т.к. корень ($t_1 - t_1\sqrt{2}$) не имеет физического смысла.

$$t_2 = t_1\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$t = t_1 + t_2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\cdot t_1$$

$$v_2 = a\cdot t_2 - v_1 = a\cdot t_1\left(1+\sqrt{2}\right) - a\cdot t_1 = \sqrt{2}\cdot a\cdot t_1$$

$$v_2 = \sqrt{2}\cdot a\cdot t_1 = \sqrt{2}\cdot v_1$$

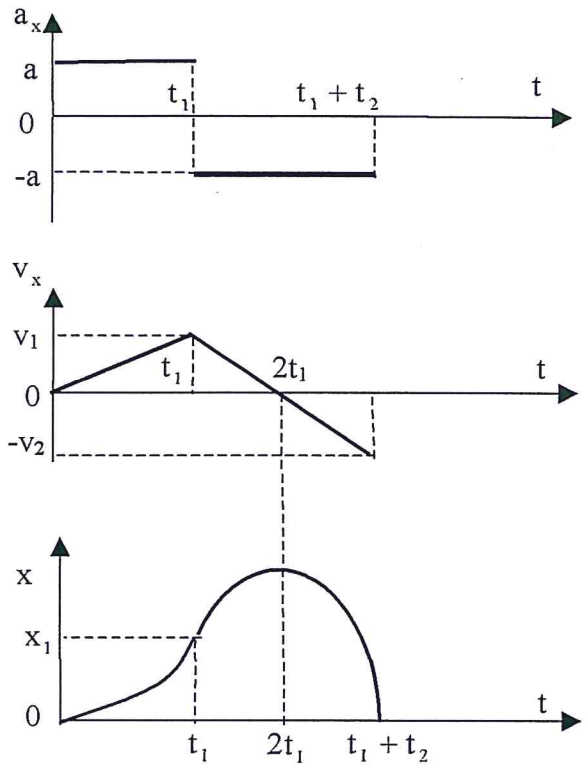


Рис.1-16. Зависимости от времени проекций ускорения, скорости и координат материальной точки.

Задача 1-5

Снаряд вылетает из пушки с начальной скоростью $v_0 = 1000$ *м/с* под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Пушка и точка падения снаряда находятся на одной горизонтали (Рис.1-17а)

1) Сколько времени снаряд находится в полёте? На каком расстоянии от пушки он упадёт на землю?

2) Под каким углом к горизонту нужно произвести выстрел, чтобы при заданной начальной скорости дальность его полёта была наибольшей. Найти величину наибольшей дальности и время её достижения.

3) Считая известным v_0 и x_{max}, определить, под каким углом к горизонту должен быть произведён выстрел, чтобы $x < x_{max}$?

Дано: v_0=1000 *м/с*; $\alpha = 30^\circ$;

Найти: t; x; α_0; x_{max}; t_0.

Решение задачи 1-5

1) Уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

Свяжем систему отсчёта с пушкой. В проекциях на оси, учтя $\vec{r}_0 = \vec{0}$:

$$\begin{cases} x = v_0 \mathrm{Cos}\alpha \cdot t \\ 0 = v_0 \mathrm{Sin}\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Найдём время полёта:

$$t\left(v_0 \mathrm{Sin}\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0$$

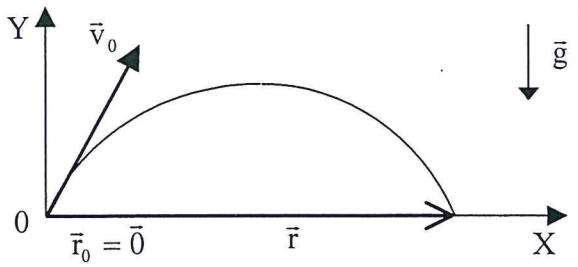


Рис. 1-17а. Полёт снаряда.

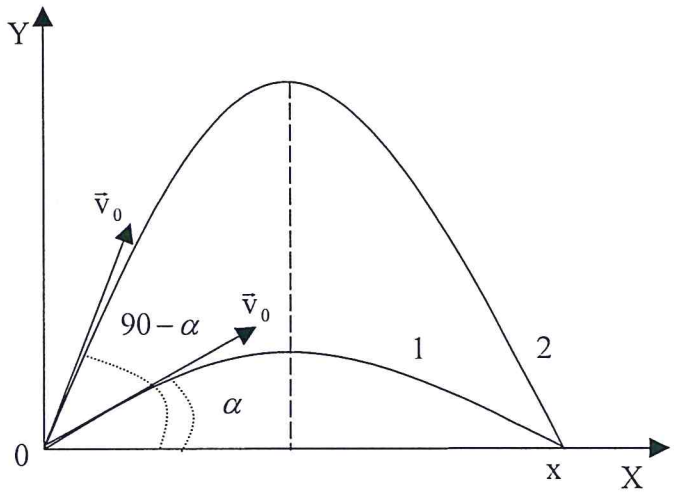


Рис. 1-17б.
1 – настильная траектория;
2 – навесная траектория.

t =0 – начальный момент.

$t = \dfrac{2v_0 \mathrm{Sin}\alpha}{g}$ - искомое время полёта.

Дальность полёта:

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \mathrm{Sin}2\alpha}{g}$$

2) Найдём угол $\alpha = \alpha_0$, при котором горизонтальная дальность полёта будет максимальной $x = x_{max}$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 (\mathrm{Sin}2\alpha)_{max}}{g};$$

$$(\mathrm{Sin}2\alpha)_{max} = 1 \text{ при } \alpha_0 = \frac{\pi}{4};\ x_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Время достижения x_{max}:

$$t_0 = \frac{2v_0 \cdot \sqrt{2}}{g \cdot 2} = \frac{v_0\sqrt{2}}{g}$$

Найдём численные значения: t=102 *с*; x=88,3 *км*; $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $x_{max} = 101{,}9$ *км*; $t_0 = 144$ *с*

3) Если $x < x_{max}$, то существуют два угла α_1 и α_2, при которых для данной начальной скорости v_0 дальность полёта будет равна x. Этот результат получается из уравнения для дальности полёта

$$x = \frac{v_0^2 \mathrm{Sin}2\alpha}{g}$$

и с учётом того, что $\mathrm{Sin}2\alpha = \mathrm{Sin}(180 - 2\alpha) = \mathrm{Sin}2(90 - \alpha)$.

Дальность полёта x при данной начальной скорости v_0 будет одинаковой при углах бросания:

$$\alpha_1 = \alpha;$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha.$$

При этом: $\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arcSin}\frac{gx}{v_0^2}$. При условии, что $x < x_{max}$, всегда существует 2 траектории, двигаясь по которым снаряд попадёт в одну и ту же точку (Рис. 1-17.b).

Пологая траектория, соответствующая углу α, называется настильной. Крутая траектория, соответствующая углу (90 - α), называется навесной.

Численные значения углов при условиях нашей задачи: $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$.

Задача 1-6

Два тела движутся по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями v_{01}=10 *м/с* и v_{02}=20 *м/с* и постоянными ускорениями a_1 = 1 *м/с²*, a_2 = 4 *м/с²*, направленными противоположно соответствующим скоростям в начальный момент времени.

1) При каком максимальном начальном расстоянии L между телами они встретятся в процессе движения? В какой момент времени τ произойдёт встреча тел?

2) Каковы скорости тел в момент встречи? Какова координата точки встречи? Найти моменты времени t_1 и t_2, когда каждое из тел имеет скорость, равную нулю.

3) Описать графически движение тел.

Дано: v_{01} =10 *м/с*;.v_{02} =20 *м/с*; a_1 =1 *м/с²*, a_2 =4 *м/с²*.

Найти: L_{max}, τ; v_1 и v_2; место встречи, x; t_1 и t_2.

Решение задачи 1-6

Свяжем систему отсчёта с точкой начального положения тела 1. Ось проведём в направлении к телу 2 (Рис.1-18).

Кинематические уравнения:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t_1 + \dfrac{\vec{a}_1 t_1^2}{2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t_2 + \dfrac{\vec{a}_2 t_2^2}{2} \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{a}_1 t_1 \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{a}_2 t_2 \end{cases}$$

То же в проекциях на ось Ox:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v_{01}t - \dfrac{a_1 t_1^2}{2} \\ x_2 = x_{02} - v_{02}t_2 + \dfrac{a_2 t_2^2}{2} \\ v_1 = v_{01} - a_1 t_1 \\ v_2 = -v_{02} + a_2 t_2 \end{cases}$$

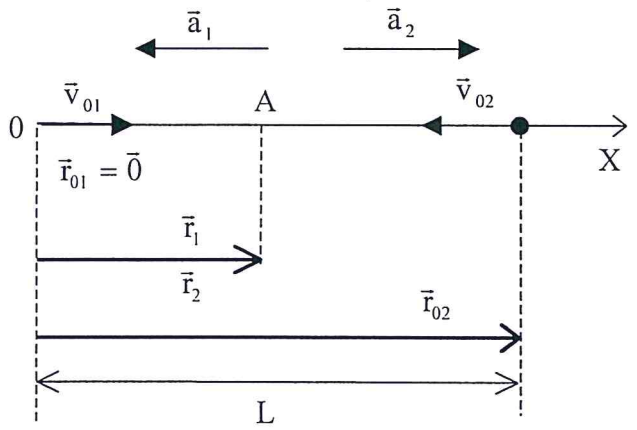


Рис. 1-18.
Движение двух тел навстречу друг другу.
$\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ - радиусы-векторы начального положения тел 1 и 2 соответственно.
$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиусы-векторы тел 1 и 2 в момент встречи в точке A.

В момент встречи тел $x_1 = x_2 = x$ и $t_1 = t_2 = \tau$. Из первых двух уравнений с учётом $x_{01} = 0$ и $r_{02} = L$, получим:

$$\begin{cases} x = v_{01}\tau - \dfrac{a_1\tau^2}{2} \\ x = L - v_{02}\tau + \dfrac{a_2\tau^2}{2} \end{cases}$$

$$v_{01}\tau - \frac{a\tau^2}{2} = L - v_{02}\tau + \frac{a_2\tau^2}{2}$$

$$(a_1 + a_2)\tau^2 - 2(v_{01} + v_{02})\tau + 2L = 0$$

$$\tau_{1,2} = \frac{(v_{01} + v_{02}) \pm \sqrt{(v_{01} + v_{02})^2 - (a_1 + a_2)\cdot 2L}}{(a_1 + a_2)}$$

Из последнего выражения для τ видны три возможных исхода:
а) Тела не встретятся, если L больше некоторого максимального значения, $L > L_{max}$ (дискриминант отрицателен).
б) Тела встретятся дважды, если $L < L_{max}$, при котором дискриминант положителен.
в) Наконец, случай, интересующий нас: $L = L_{max}$. При этом, дискриминант равен нулю. Тела встретятся единожды в момент времени τ от начала движения тел:

$$\tau = \frac{v_{01} + v_{02}}{a_1 + a_2}$$

Максимальное начальное расстояние между телами найдём из соотношения:

$$\left(v_{01}+v_{02}\right)^2-\left(a_1+a_2\right)\cdot 2L_{max}=0$$

$$L_{max}=\frac{\left(v_{01}+v_{02}\right)^2}{2\left(a_1+a_2\right)}$$

Координата точки встречи тел найдётся из уравнения движения тела 1 или тела 2.

$$x=v_{01}\tau-\frac{a_1\tau^2}{2},$$

где τ - время встречи тел.

Найдём скорости тел в момент встречи. Уравнения для скорости тел:

$$\begin{cases} v_1=v_{01}-a_1t_1 \\ v_2=-v_{02}+a_2t_2 \end{cases}$$

Учтя, что $t_1=t_2=\tau=\dfrac{v_{01}+v_{02}}{a_1+a_2}$, получим:

$$v_1=v_{01}-a_1\cdot\frac{v_{01}+v_{02}}{a_1+a_2}=\frac{v_{01}a_2-v_{02}a_1}{a_1+a_2}$$

$$v_2=-v_{02}+a_2\cdot\frac{v_{01}+v_{02}}{a_1+a_2}=\frac{v_{01}a_2-v_{02}a_1}{a_1+a_2}$$

Таким образом, $v_1=v_2$ по модулю и по направлению в точке встречи. Полученный результат становится ясным из графиков $x_1(t)$ и $x_2(t)$, которые касаются в точке встречи тел, т.е. имеют общую касательную. Следовательно, в точке встречи тела всегда имеют одинаковую скорость

$$v_1=v_2=\frac{v_{01}a_2-v_{02}a_1}{a_1+a_2}$$

Время достижения нулевой скорости для каждого из тел:

$$\begin{matrix} 0=v_{01}-a_1t_1 \\ 0=-v_{02}+a_2t_2 \end{matrix};\qquad \begin{matrix} t_1=\dfrac{v_{01}}{a_1} \\ t_2=\dfrac{v_{02}}{a_2} \end{matrix}$$

Подставляя численные значения:

$L_{max}=$ 90 *м*; x (встречи) = 42 *м*; $t_1=10$ *с*; $t_2=5$ *с*; $\tau=6$ *с*; $v_1=v_2=4$ *м/с*.

На рисунке 1-19 представлены зависимости скорости, ускорения и максимального расстояния между телами от времени движения тел.

Таблица 1-3.

Расчётные данные к рисунку 1-19.

t	*с*	0	1	5	6	10
x_1	*м*	0	9,5	37,5	50	0
x_2	*м*	90	72	40	90	490
v_1	*м/с*	10	9	5	0	-10
v_2	*м/с*	-20	-16	0	20	60

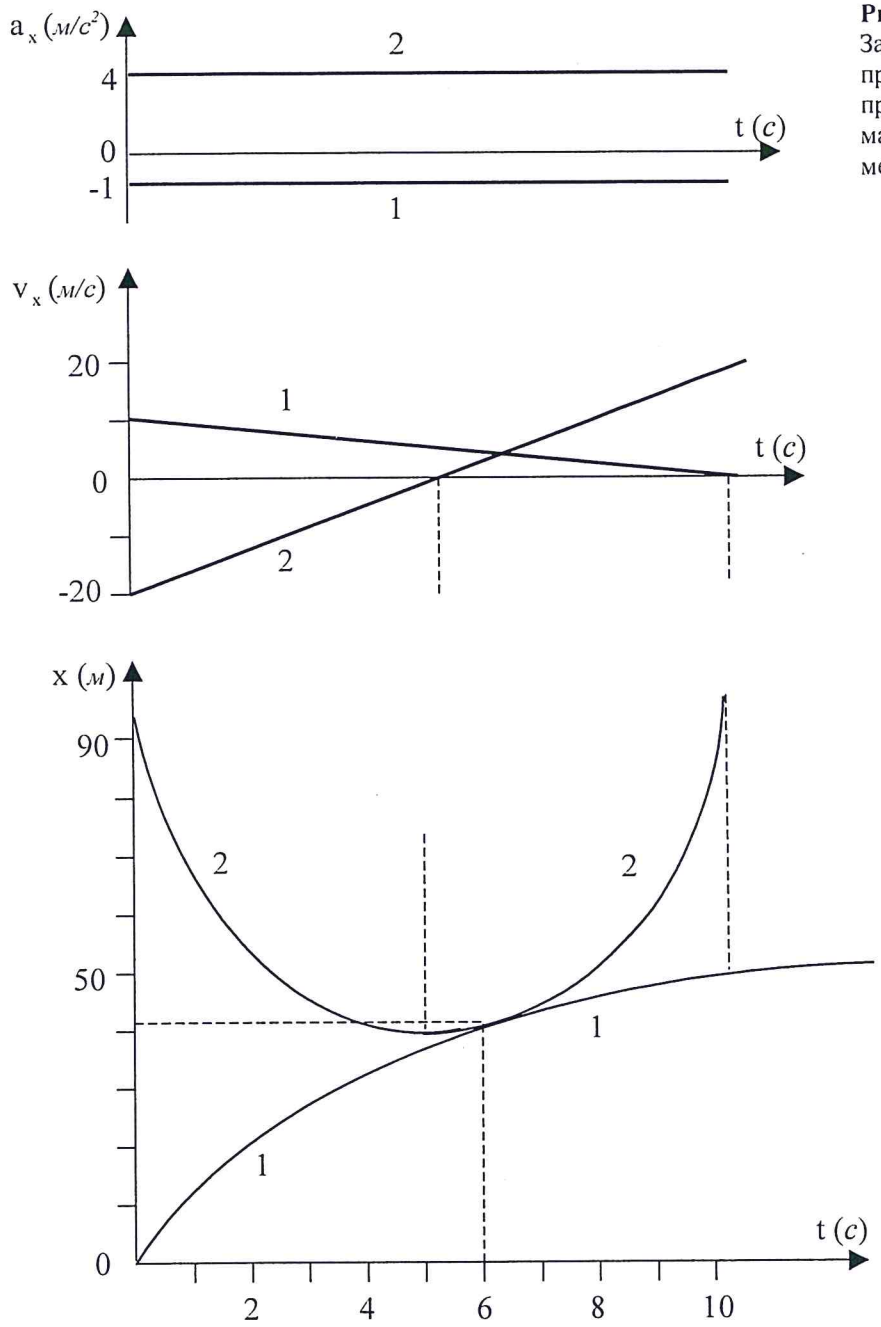


Рис.1-19. Зависимости от времени проекций ускорения, проекций скорости и максимального расстояния между телами.

Задача 1-7

Катер курсирует между пунктами А и В, которые находятся на противоположных берегах реки. При этом катер всё время остаётся на прямой АВ. Расстояние между А и В равно 1200 *м*. Скорость течения реки u=1,9 *м/с*. Прямая АВ составляет с направлением течения реки угол $\alpha = 60°$.

С какой скоростью $\bar{v}$ и под каким углом β к прямой АВ должен двигаться катер, чтобы пройти путь из А в В и обратно за время t=5 *мин.*? Угол β остаётся одинаковым при движении катера из А в В и обратно.

Решение задачи 1-7

Движение катера (Рис.1-20) в случаях а) и б) складывается из движения его относительно воды и движения катера вместе с водой относительно берегов. Спроектируем скорости $\vec{v}$ и $\vec{u}$ на оси вдоль прямой АВ и перпендикулярно АВ. Чтобы катер всё время находился на прямой АВ при движении как в одну, так и в другую сторону, необходимо:

$v \cdot \mathrm{Sin}\beta = u \cdot \mathrm{Sin}\alpha$ Время движения из А в В обозначим t_1. Время движения из В в А обозначим t_2. Скорости катера относительно берегов при движении из А в В и обратно выразятся соответственно:

$$v \cdot \mathrm{Cos}\beta + u \cdot \mathrm{Cos}\alpha = \frac{s}{t_1};$$

$$v \cdot \mathrm{Cos}\beta - u \cdot \mathrm{Cos}\alpha = \frac{s}{t_2}$$

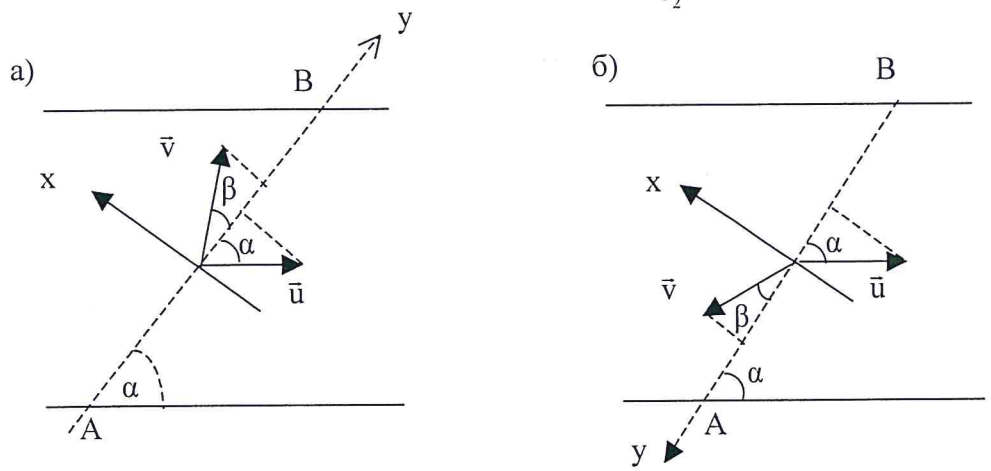


Рис.1-20. Движение катера:
а) Из пункта А в пункт В;
б) Из пункта В в пункт А.
$\vec{v}$ - скорость движения катера. $\vec{u}$ - скорость течения реки.

Согласно условию $t_1 + t_2 = t$, и решая совместно уравнения, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{t_1}{s} = \dfrac{1}{v\mathrm{Cos}\beta + u\mathrm{Cos}\alpha} \\ \dfrac{t_2}{s} = \dfrac{1}{v\mathrm{Cos}\beta - u\mathrm{Cos}\alpha} \\ v\mathrm{Sin}\beta = u\mathrm{Sin}\alpha \end{cases}$$

$$\frac{t_1 + t_2}{s} = \frac{1}{v\mathrm{Cos}\beta + u\mathrm{Cos}\alpha} + \frac{1}{v\mathrm{Cos}\beta - u\mathrm{Cos}\alpha}$$

$$\frac{t}{s} = \frac{2v\mathrm{Cos}\beta}{v^2\mathrm{Cos}^2\beta - u^2\mathrm{Cos}^2\alpha}$$

$$u \cdot t \cdot \mathrm{Sin}^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\beta - 2s \cdot \mathrm{Sin}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta - u \cdot t \cdot \mathrm{Cos}^2\alpha = 0$$

$$\mathrm{ctg}\beta = \frac{2s \cdot \mathrm{Sin}\alpha \pm \sqrt{4s^2\mathrm{Sin}^2\alpha + 4u^2\mathrm{Sin}^2\alpha \cdot t^2\mathrm{Cos}^2\alpha}}{2u \cdot \mathrm{Sin}^2\alpha \cdot t} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + u^2t^2\mathrm{Cos}^2\alpha}}{t \cdot u \cdot \mathrm{Sin}\alpha}$$

Физический смысл имеет положительное значение $\mathrm{ctg}\beta$:

$$\beta = \mathrm{arcctg}\frac{s + \sqrt{s^2 + t^2u^2\mathrm{Cos}^2\alpha}}{t \cdot u \cdot \mathrm{Sin}\alpha} = 12^\circ$$

$$v = u \cdot \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Sin}\beta} = 8 \text{ м/с}$$

Задача 1-8

1) В каком случае потребуется большее время для проезда расстояния S=1 *км* на катере туда и обратно по реке, t, (скорость течения u=4 *км/час*) и по озеру, t', (в стоячей воде), если скорость катера относительно воды в обоих случаях v=8 *км/час*? Решить задачу аналитически и графически.

2) Найти зависимость отношения $\frac{t}{t'}$ от скорости течения реки u при заданной скорости катера относительно воды. Изобразить зависимость графически.

3) Какова будет длина пути S^*, пройденного катером, относительно воды, по реке туда и обратно. Как будет зависеть отношение $\frac{S^*}{S}$ от скорости реки?

Решение задачи 1-8

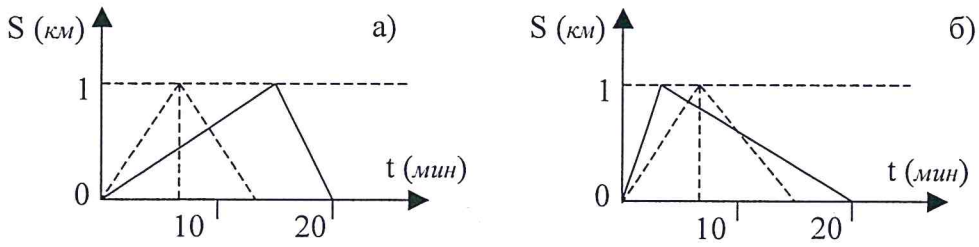


Рис. 1-21. а) Катер сначала идёт против течения. б) Катер сначала идёт по течению. Сплошная линия – движение по реке. Пунктирная линия – движение по озеру.

1) Время движения катера по реке против течения:

$$t_1 = \frac{S}{v - u};$$

По течению:

$$t_2 = \frac{S}{v + u};$$

Полное время движения по реке туда и обратно:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{v - u} + \frac{S}{v + u} = \frac{2Sv}{v^2 - u^2}$$

Время движения туда и обратно по озеру: $t' = \dfrac{2S}{v}$

Подставляя числовые данные, получим:

$t_1 = 15$ *мин.*; $t' = 15$ *мин.*; $t_2 = 5$ *мин.*; $\dfrac{t}{t'} = 1{,}33$

$t = t_1 + t_2 = 20$ *мин.*

Найденные результаты показаны на графиках движения катера (Рис.1-21)

2) Найдём зависимость $\dfrac{t}{t'}$:

$$\frac{t_1 + t_2}{t'} = \frac{t}{t'} = \frac{\dfrac{S}{v-u} + \dfrac{S}{v+u}}{\dfrac{v}{2S}} = \frac{v^2}{v^2 - u^2}$$

Считая v = 8 *км/час*, построим график зависимости $\dfrac{t}{t'}(u)$ (Рис.1-22).

Из графика следует, что отношение $\dfrac{t}{t'}$ растёт по мере сближения значений скорости течения реки и скорости катера относительно воды.

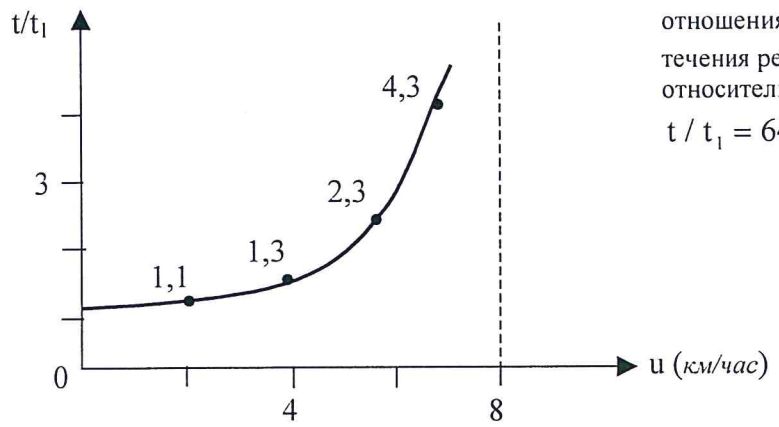


Рис. 1-22. График зависимости отношения t / t_1 от скорости течения реки. Скорость катера относительно воды $v = 8$ *км/час*.

$t / t_1 = 64 / \left(64 - u^2\right)$

3) При движении против течения и по течению, катер относительно воды пройдёт пути:

$$S_1 = v \cdot t_1 = \frac{v \cdot S}{v - u}; \quad S_2 = v \cdot t_2 = \frac{v \cdot S}{v + u};$$

Полный путь, пройденный катером относительно воды:

$$S^* = S_1 + S_2 = \left(\frac{v}{v-u} + \frac{v}{v+u}\right) \cdot S = \frac{2v^2 S}{v^2 - u^2} = 2{,}66 км$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{2v^2}{v^2 - u^2} = 2{,}66$$

Задача 1-9

Материальная точка движется вдоль прямой так, что её ускорение изменяется по закону $a = 4 - 6t$, здесь t выражено в секундах (*с*), а ускорение - в (*м/с*^{2}).
Известно, что в начальный момент времени t=0, начальная координата x_0= -3*м*, а начальная скорость $v_0 = 4$ *м/с*

1) Написать временные зависимости скорости v(t) и координаты x(t).
2) Вычислить, при каком значении t, скорость будет максимальной, v_{max}. Найти величину максимальной скорости.
3) В какой момент времени t_2 координата точки достигнет x_{max}. Найти x_{max}.
4) Описать движение точки в графиках a=a(t); v=v(t); x=x(t) во временном интервале $0 \le t \le 3{,}5$, где t – в секундах.

Дано: $a = 4\text{-}6t$; $x_0 = -3$ *м*; $v_0 = 4$ *м/с*.
Найти: t_1; v_{max}; t_2, x_{max}.

Решение задачи 1-9

1) Найдём зависимость:

$$\frac{dv}{dt} = a\,; \quad a = 4 - 6t\,;$$

$$v = \int(4 - 6t)dt = 4t - 6\frac{t^2}{2} + c_1$$

где c_1 - константа. c_1 найдём из условия: при t = 0, $v=v_0=4$м/с. Отсюда, $v_0=c_1$.
Уравнение для скорости примет вид:

$$v = 4 + 4t - 3t^2$$

Зависимость координаты от времени:

$$\frac{dx}{dt} = v\,; \; x = \int v \cdot dt\,;$$

$$x = \int\left(4 + 4t - 3t^2\right)dt = 4t + 4 \cdot \frac{t^2}{2} - 3\frac{t^3}{3} + c_2$$

где c_2 - константа, которая находится из начального условия: при t = 0, $x=x_0=-3$*м*. Отсюда, подставляя в уравнение для координаты x = 0 при t = 0, получим $x_0=c_2$.
Уравнение движения примет вид:

$$x = -3 + 4t + 2t^2 - t^3$$

Таким образом, если известен закон изменения ускорения во времени a(t) и начальные условия x_0, v_0, нетрудно найти v(t) и x(t). В общем случае, чтобы полностью описать движение материальной точки вдоль прямой, достаточно знать одну из трёх зависимостей a(t), v(t) или x(t), а также начальные условия. Это справедливо, в частности, для равнопеременного движения, когда a = const.

2) Скорость будет максимальной в момент времени t, когда производная

$$\frac{dv}{dt} = a = 0$$

$$4 - 6t_1 = 0$$

$$v_{max} = 4 + 4t_1 - 3t_1^2$$

t_1 =0,67 *с*; v_{max} = 5,33 *м/с*;

3) Координата точки достигнет максимума в момент, когда

$$\frac{dx}{dt} = v = 0;$$

$$4 + 4t_2 - 3t_2^2 = 0$$

$$t_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 4 \cdot 3}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$$

Поскольку корень $t<0$ не имеет физического смысла , получаем:
$t_2=2$ *с*; $x_{max}=-3+4t_2+2t_2^2-t_2^3$; $x_{max}=5$ *м*.
В таблицу 1–4 сведены данные, необходимые для построения графиков $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$ в интервале времени $0 \le t \le 3,5$ *с*.

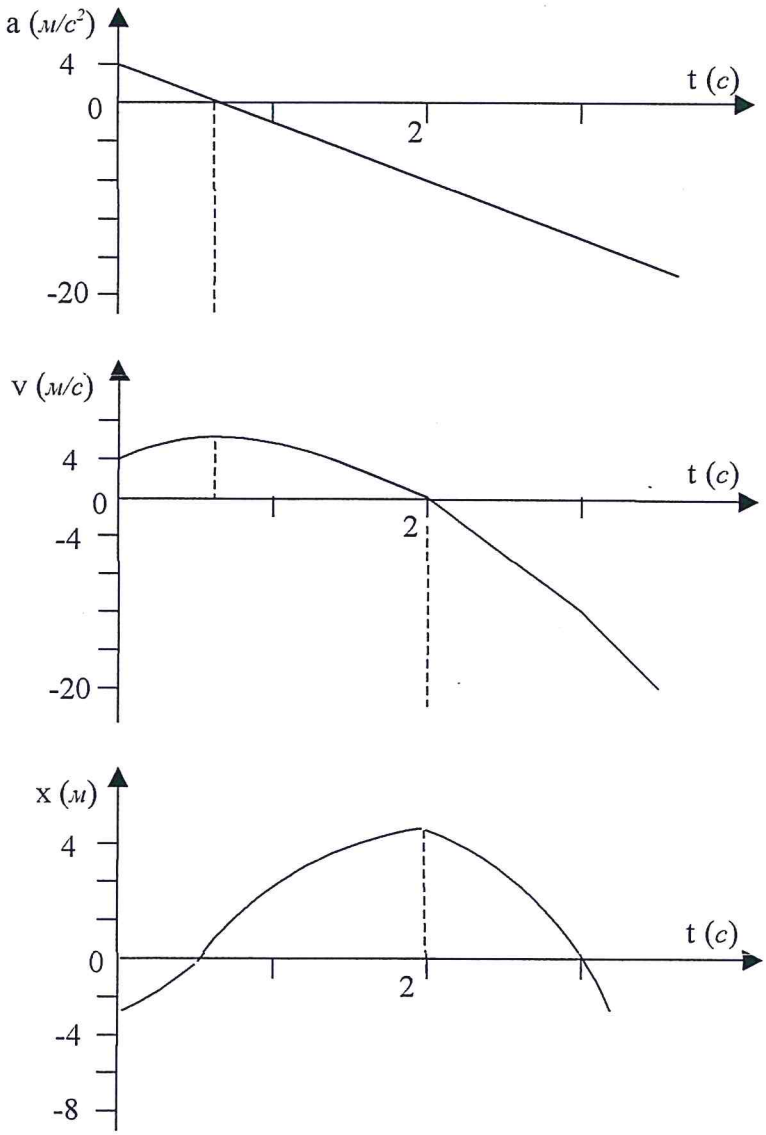


Рис. 1-23.
График зависимостей от времени ускорения ,скорости и координаты движения материальной точки вдоль прямой с ускорением, изменяющимся линейно со временем.

Таблица 1-4

t (*с*)	x (*м*)	v (*м/с*)
0	-3	4
0,25	-1,9	4,8
0,50	-0,6	5,25
0,67	0,3	5,33
1	2	5
2	5	0
3	0	-11
3,5	-7,4	-18,8

О понятии "средняя скорость движения"

Необходимо знать, что в механике введены два различных понятия средней скорости движения:

Векторная средняя скорость, определяемая, как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{s}$ тела за определённое время Δt, к этому промежутку времени:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

Скалярная средняя скорость, определяемая, как отношение пути ΔL, пройденного телом вдоль траектории за время Δt, к этому промежутку времени:

$$v_{ср} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

В общем случае средняя скалярная скорость не совпадает с модулем векторной средней скорости. Например, для спутника Земли на околоземной орбите скалярная средняя скорость близка к 8 км/час, в то время как средняя векторная скорость, взятая за промежуток времени, равный периоду обращения, равна:

$$\vec{v}_{ср} = \vec{0}$$

Равенство средних скоростей $\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ выполняется лишь в случае прямолинейного движения тела в одном направлении. В дальнейшем будем говорить о скалярной средней скорости.

Среднюю скорость можно найти по графику зависимости модуля мгновенной скорости от времени (Рис.1-24). Площадь под кривой v(t) на интервале времени Δt определяет пройденный телом путь ΔL. Поэтому, в соответствии с определением средней скорости, по графику можно подобрать такое значение неизменной скорости, которое позволит пройти то же расстояние и за то же время, что и при истинном движении с изменяющейся скоростью.

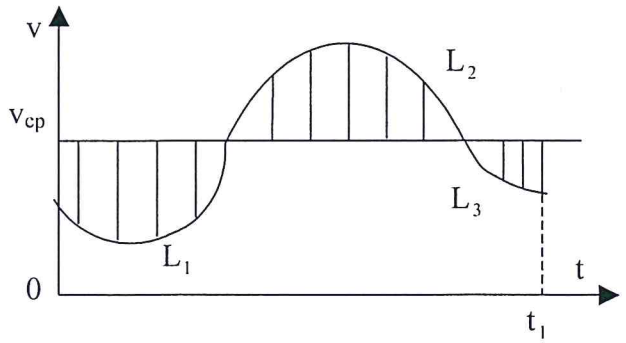


Рис. 1-24.
График зависимости модуля мгновенной скорости от времени. $v_{ср}$ в интервале от 0 до t_1 получена при условии: $L_2 = L_1 + L_3$.

$v_{ср}$ можно определять так же по графику L(t). Поскольку $v_{ср} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$, то на графике L(t) средняя скорость определяется тангенсом угла наклона прямой, соединяющей начальную и конечную точки рассматриваемого участка движения, к интервалу времени Δt (Рис.1-25).

По этому графику легко судить и об изменении $v_{ср}$ в зависимости от выбора промежутка времени Δt, на котором проводится усреднение. Достаточно изобразить соответствующие отрезки AB и AC и сравнить углы их наклона α_1 и α_2 к оси времени. Такой графический анализ наглядно убеждает, что понятие $v_{ср}$ имеет смысл только на заданном отрезке пути (или времени).

График зависимости пути от времени при неравномерном прямолинейном движении позволяет отыскать тот момент времени t*, в котором модуль мгновенной скорости совпадает с величиной средней скорости на рассматриваемом участке движения. Для этого нужно соединить отрезком прямой начальную и конечную точки (Рис.1-25) на рассматриваемом участке и параллельным переносом отрезка AB до касания с графиком L(t) найти искомую точку M, отвечающую моменту времени t*.

Поскольку отрезок AB и касательная в точке M параллельны, т.е. имеют одинаковые тангенсы наклона с осью t, модуль скорости в точке M численно равен средней скорости на интервале Δt_1.

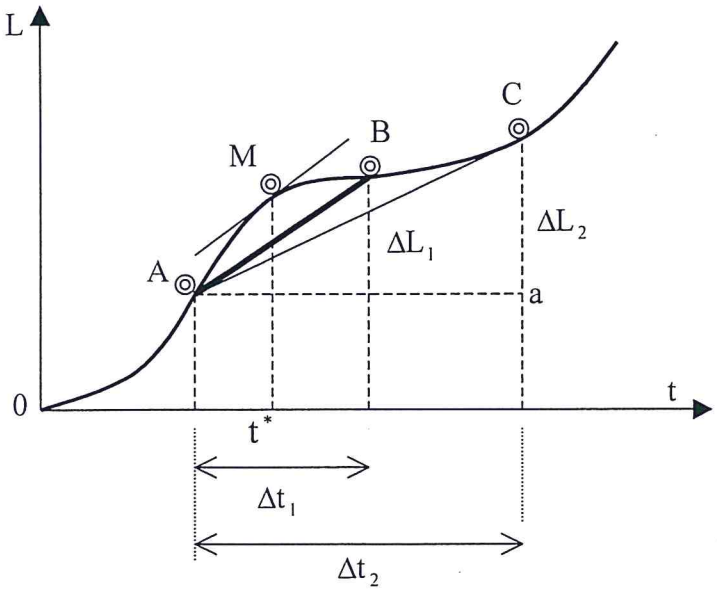


Рис. 1-25
График зависимости пути от времени.

$$v_{ср1} = \frac{\Delta L_1}{\Delta t_1} = \mathrm{tg}\,\alpha_1;$$

$$v_{ср2} = \frac{\Delta L_2}{\Delta t_2} = \mathrm{tg}\,\alpha_2.$$

(Неравномерное прямолинейное движение).
Угол BAa - α_1;
Угол CAa - α_2.

Задача 1-10

Автомобиль начинает движение из состояния покоя вдоль прямой. Закон изменения пути L от времени выражается равенством:

$L = 2t^2$,

где L выражено в метрах, t – в секундах.

Определить аналитически, а также используя графики движения L(t) и v(t):

1) Средние скорости автомобиля на интервалах времени:

$t_1 = 1$ *с*; $t_2 = 2$ *с*; (а)
$t_1 = 1$ *с*; $t_3 = 3$ *с*; (б)
$t_1 = 1$ *с*; $t_4 = 4$ *с*; (в)

2) Момент времени t*, в который модуль мгновенной скорости автомобиля равен средней скорости на интервале t_1=1 *с*; t_4=4 *с*. Какой путь прошёл автомобиль к моменту t*?

Решение задачи 1-10

Средняя скорость автомобиля на временном интервале (а) из графика v(t):

$$v_{ср1} = \frac{L_1}{\Delta t_1} = \frac{(4+8)\cdot 1}{2\cdot 1} = 6\ м/с$$

То же на интервале (б):

$$v_{ср2} = \frac{L_2}{\Delta t_2} = \frac{(4+12)\cdot 2}{2\cdot 2} = 8\ м/с$$

То же на интервале (в):

$$v_{ср3} = \frac{L_3}{\Delta t_3} = \frac{(4+16)\cdot 3}{2\cdot 3} = 10 м/с$$

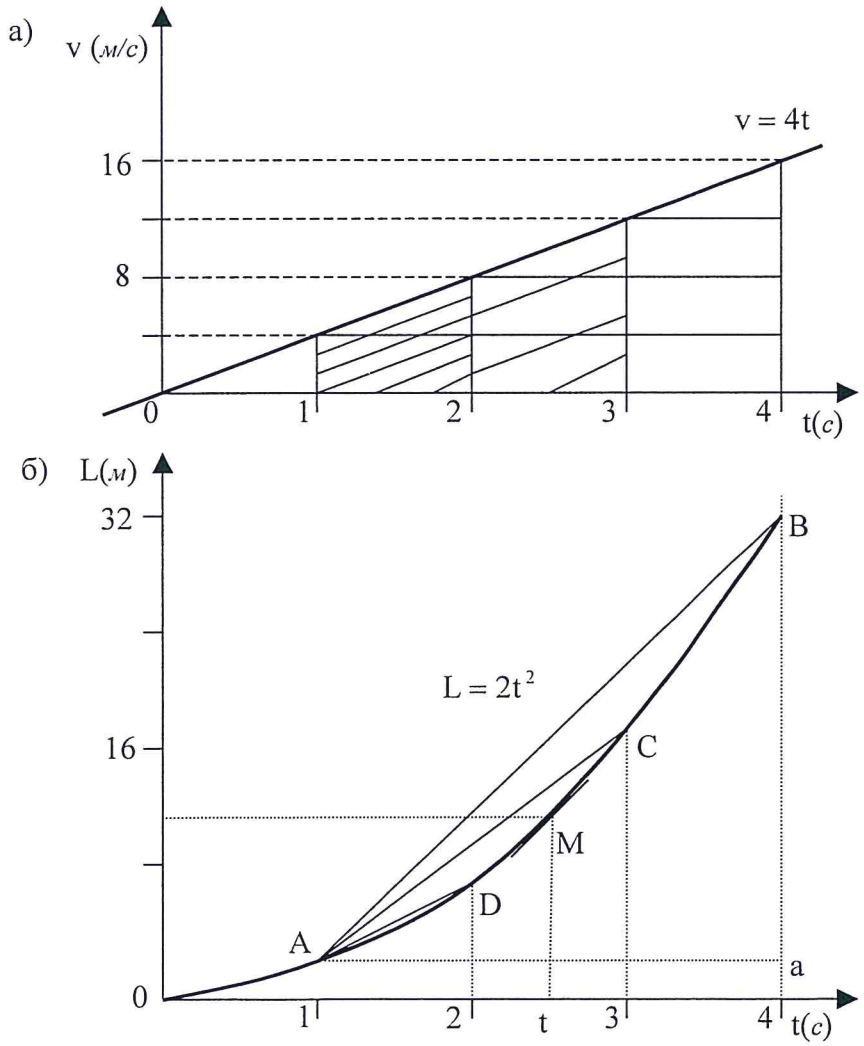


Рис. 1-26
а) Зависимость скорости автомобиля от времени.
б) Зависимость пройденного вдоль прямой пути от времени.
Угол BAa - α_3;
Угол CAa - α_2;
Угол DAa - α_1;

Найдём средние скорости автомобиля на тех же временных интервалах, пользуясь графиком L(t):
$v_{ср1}=tg\alpha_1=6/1=6$ *м/с*;
$v_{ср2}=tg\alpha_2=16/2=8$ *м/с*;
$v_{ср3}=tg\alpha_3=30/3=10$ *м/с*.
Найдём время t*, в котором $v=v_{ср}3=10$ *м/с*. Из уравнения v=4 t*=10 *м/с* получим: t*=2,5*с*. В момент t* автомобиль прошёл путь: $L=2(t^*)^2=12,5$ *м*.

Задача 1-11

Автомобиль 1 каждую минуту "скачком" изменяет скорость, как показано на рисунке (1-27а). Значения скоростей: v_1 = 40 *км/час*; v_2=60 *км/час*; v_3=80 *км/час*; v_4=20 *км/час*.
Автомобиль 2 каждый пройденный километр пути проходит с тем же набором скоростей (Рис.1-27б), что и автомобиль 1.
Найти среднюю скорость движения каждого автомобиля.

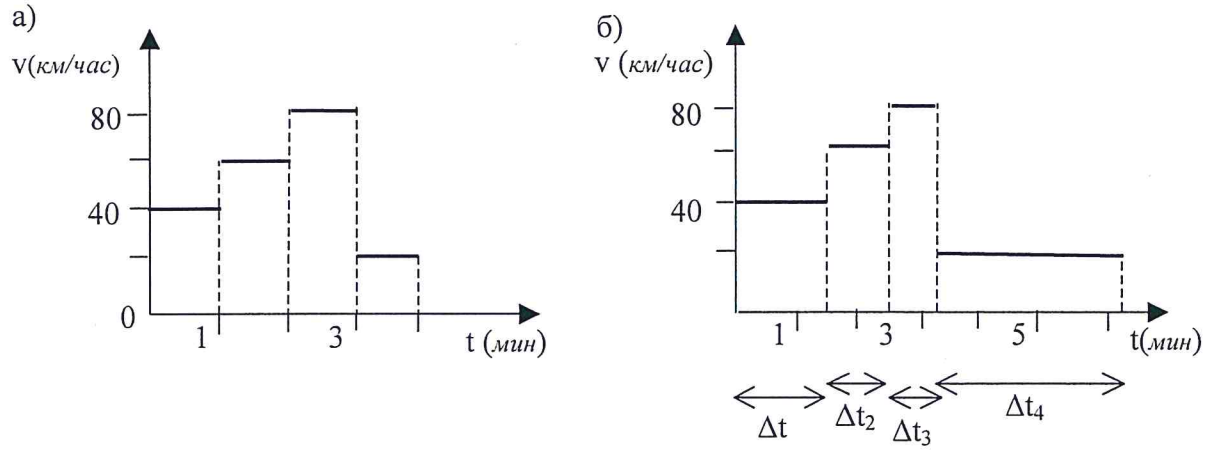


Рис.1-27. Графики изменения скорости : а) автомобиля 1, б) автомобиля 2.

Решение задачи 1-11

Согласно определению, средняя скорость движения при любом неравномерном движении равна отношению пройденного пути ко всему затраченному времени: $v_{ср}=L/t$.
Средняя скорость автомобиля 1:

$$v_{ср1}=\frac{L}{t}=\frac{v_1\Delta t+v_2\Delta t+v_3\Delta t+v_4\Delta t}{4\Delta t}=\frac{1}{4}(v_1+v_2+v_3+v_4),$$

поскольку $L_1=v_1\Delta t$, $L_2=v_2\Delta t$, $L_3=v_3\Delta t$, $L_4=v_4\Delta t$, то $v_{ср1}=50$ *км/час*.
Для автомобиля 2 одинаковы не времена движения на каждом участке, а пройденные пути ΔL. При этом:

$$\Delta t_1=\frac{\Delta L}{v_1},\quad \Delta t_2=\frac{\Delta L}{v_2},\quad \Delta t_3=\frac{\Delta L}{v_3},\quad \Delta t_4=\frac{\Delta L}{v_4}.$$

$$v_{ср2}=\frac{L}{t}=\frac{4\Delta L}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\Delta t_4}=\frac{4\Delta L}{\frac{\Delta L}{v_1}+\frac{\Delta L}{v_2}+\frac{\Delta L}{v_3}+\frac{\Delta L}{v_4}}=\frac{4}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}}$$

$v_{ср2}=38$ *км/час*

Задача 1-12

Мишень А находится на высоте H=60 *м* над поверхностью Земли и на расстоянии L=20 *м* по горизонтали от стрелка из лука. В тот момент, когда мишень начинает падать без начальной скорости, производится выстрел. Начальная скорость стрелы v_0=50 *м/с*. Пренебрегая сопротивлением воздуха при движении стрелы и мишени, определить:

Под каким углом к горизонту должна быть пущена стрела, чтобы она поразила мишень?

На какой высоте произойдёт поражение цели?

Сколько времени стрела была в полёте до момента поражения мишени?

Произойдёт ли поражение мишени, если будет изменён модуль начальной скорости при тех же значениях H и L?

Решение задачи 1-12

Решим задачу согласно сформулированному алгоритму. Рассмотрим движения мишени и стрелы в системе, связанной с Землёй (Рис.1-28). Здесь O – тело отсчёта, положение которого выбрано в точке начального положения стрелы.

Движение происходит в плоскости x, y. Начало отсчёта времени связано с моментом выстрела и началом падения мишени. Движения мишени и стрелы, согласно условию задачи, происходят с постоянным ускорением свободного падения $\vec{g}$ (равнопеременные движения). На рисунке 1-28 показано положение мишени в точке M в начальный момент времени и её начальная скорость $\vec{v}_{02} = \vec{0}$. Стрела имеет начальную скорость $\vec{v}_{01} = \vec{v}_0$. Радиусы-векторы начального положения стрелы и мишени (в соответствии с выбором местоположения тела отсчёта): $\vec{r}_1 = \vec{0}$ и $\vec{r}_{02}$, соответственно. Их радиусы-векторы в момент встречи t равны между собой (т.к. оба имеют начало в теле отсчёта и конец – в точке встречи N): $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Запишем уравнения движения обоих тел в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01} \cdot t + \vec{g}t^2/2; \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02} \cdot t + \vec{g}t^2/2; \end{cases}$$

Спроецируем уравнения движения на выбранные оси, учтя, что $r_{01} = 0$, $v_{01} = v_0$, $v_{02} = 0$:

$$\begin{cases} L = v_0 \cdot \mathrm{Cos}\alpha \cdot t; \\ h = v_0 \cdot \mathrm{Sin}\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \\ h = H - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Решим систему в общем виде:

$$v_0 \cdot \mathrm{Sin}\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H - \frac{gt^2}{2};$$

$$\begin{cases} v_0 \cdot \mathrm{Sin}\alpha \cdot t = H; \\ v_0 \cdot \mathrm{Cos}\alpha \cdot t = L; \end{cases}$$

Для нахождения времени движения тел до момента встречи, возведём уравнения системы в квадрат и сложим:

$$v_0^2 t^2 \left(\mathrm{Sin}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\alpha\right) = H^2 + L^2;$$

$$t = \frac{\sqrt{H^2 + L^2}}{v_0};$$

Поражение мишени произойдёт на высоте:

$$h = H - \frac{gt^2}{2};$$

$$h = H - \frac{g}{2} \cdot \frac{H^2 + L^2}{v_0^2};$$

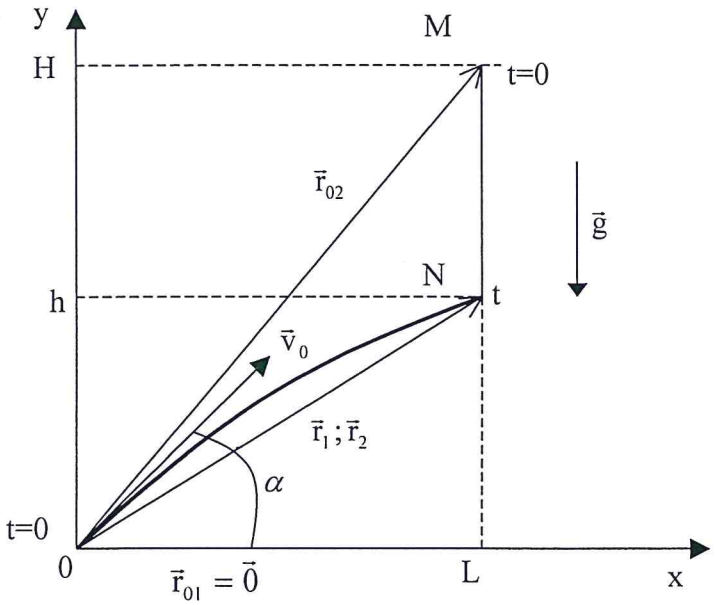


Рис. 1-28.
Движение мишени и стрелы в системе, связанной с Землёй.

Из той же системы найдём угол α, разделив первое уравнение на второе:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{L}; \alpha = \mathrm{arctg}\frac{H}{L};$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

Начальная скорость стрелы $\vec{v}_0$ должна быть направлена в точку, где находится цель в момент начала её падения, т.е. вектор $\vec{v}_0$ должен быть сонаправлен вектору $\vec{r}_{02}$.

Угол α не зависит от модуля v_0 и от времени t полёта стрелы до цели. v_0 может изменяться в широких пределах и должен быть ограничен лишь снизу. v_{0min} определяется из условия, что мишень за время полёта стрелы не успеет упасть на Землю. Это требование выразится соотношением:

$$h = H - \frac{g\left(H^2 + L^2\right)}{2v_0^2} > 0$$

Откуда:

$$v_0 > \sqrt{\frac{g\left(H^2 + L^2\right)}{2H}};$$

Т.о. поражение цели произойдёт при $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{H}{L}$ и при начальной скорости:

$$v_0 > \sqrt{\frac{g\left(H^2 + L^2\right)}{2H}}.$$

В зависимости от v_0 точка встречи может оказаться как на восходящей, так и на нисходящей ветвях траектории стрелы.

Величина v_0 влияет лишь на время полёта, t, до мишени и, как следовало ожидать, находится с ним в обратно – пропорциональной зависимости (см. ниже).

Найдём числовые значения результатов в системе СИ.

$$t = \frac{\sqrt{H^2 + L^2}}{v_0} \cong 1{,}3\ c; \quad h = H - \frac{g}{2} \cdot \frac{H^2 + L^2}{v_0^2} = 52{,}2\ м;$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{H}{L} = 71^\circ 30'; \quad v_0 > \sqrt{\frac{g\left(H^2 + L^2\right)}{2H}} = 18{,}3 м/с.$$

Попробуем решить данную задачу, выбрав другую систему отсчёта. Свяжем новую систему отсчёта (СО) с мишенью.

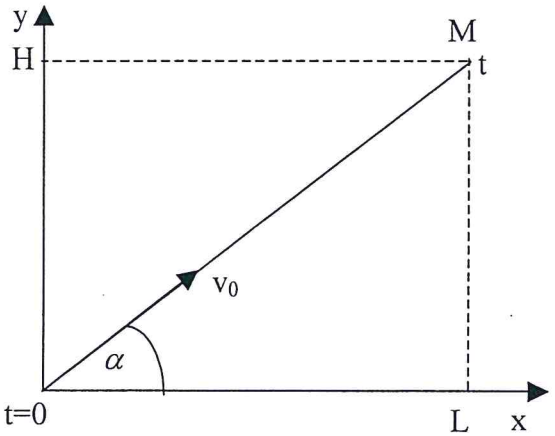


Рис. 1-29.
Мишень и стрела в системе отсчета, связанной с мишенью.

Предварительно заметим, что в рамках кинематики все СО равноценны и выбор определяется только удобством. При переходе из одной системы в другую скорость и ускорение изменяются согласно соотношениям:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{2,1};$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_{2,1};$$

Здесь $\vec{v}_1$ и $\vec{a}_1$ - скорость и ускорение тела относительно первой СО; $\vec{v}_2$ и $\vec{a}_2$ - то же, относительно второй СО; $\vec{v}_{2,1}$ и $\vec{a}_{2,1}$ - скорость и ускорение второй СО относительно первой. (Мы разбираем только СО, движущиеся поступательно относительно друг друга).

Вернёмся к задаче. Наш выбор СО, связанной с мишенью, продиктован тем, что оба тела движутся с одним ускорением $\vec{g}$. В этой СО движение стрелы будет равномерным и прямолинейным, поскольку для неё будет:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_{2,1}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$$

В системе отсчёта, связанной с мишенью, скорость стрелы будет:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{2,1}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 - \vec{0} = \vec{v}_0$$

В той же системе отсчёта мишень покоится в течение всего рассматриваемого времени. Таким образом, в новой, рационально выбранной СО решение упростится. Из рисунка 1-29 видно, что $\vec{v}_0$ должна быть направлена в точку М, в которой находится мишень в момент начала её падения. Т.е.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{H}{L}$$

Время полёта стрелы до точки встречи:

$$t = \frac{\sqrt{H^2 + L^2}}{v_0}$$

За это время новая СО переместится по отношению неподвижной СО на расстояние (H–h):

$$H - h = \frac{gt^2}{2} = \frac{g\left(H^2 + L^2\right)}{2v_0^2}$$

Откуда:

$$h = H - \frac{g}{2}\cdot\frac{H^2 + L^2}{v_0^2}$$

Рисунок также наглядно показывает, что при $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{H}{L}$ и любой скорости $v_0 > v_{min}$, при которой мишень не успеет достигнуть поверхности земли, произойдёт поражение мишени.

Кинематика кругового движения материальной точки

Круговым движением материальной точки называется такое её движение, траекторией которого является окружность. Напомним основные особенности движения материальной точки. по окружности.

Как известно, линейная скорость $\vec{v}$ всегда направлена по касательной к окружности и может изменяться как по модулю, так и по направлению. Вектор ускорения $\vec{a}$ в этом случае составляет некоторый угол с направлением скорости. Для анализа движения принято разложить $\vec{a}$ на две компоненты: $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.

$\vec{a}_\tau$ - касательное или тангенциальное ускорение. Это компонента полного ускорения $\vec{a}$ в направлении касательной. $\vec{a}_\tau$ ответственно за изменение скорости по модулю:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$\bar{a}_n$ - нормальное или центростремительное ускорение. Оно является компонентой $\bar{a}$ на нормаль к касательной. $\bar{a}_n$ всегда направлено к центру окружности и ответственно за изменение скорости по направлению. Модуль центростремительного ускорения выражается формулой:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Равномерным вращением называется движение, при котором тело за равные промежутки времени перемещается на один и тот же угол φ. Угловая скорость равномерного вращения, ω, измеряется отношением угла поворота за время t к величине этого t:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Угловая скорость связана с линейной скоростью соотношением:

$$v = \omega \cdot R,$$

где R – радиус траектории, т.е. расстояние от вращающейся точки до центра вращения.
Средней скоростью неравномерного вращения за время Δt является:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Предел выражения ω_{cp} при неограниченном уменьшении Δt называется мгновенной угловой скоростью:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt};$$

Вращение, при котором за любые равные промежутки времени ω изменяется на одну и ту же величину, называется равнопеременным вращением.
Угловым ускорением неравномерного вращения ε называется величина, равная производной угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

Угловым ускорением равнопеременного вращения называется величина, измеряемая отношением изменения угловой скорости за время t к величине этого промежутка времени:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

где ω_0 - угловая скорость в начальный момент времени, ω - угловая скорость в момент времени t. Откуда:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

Угол поворота при равнопеременном вращении материальной точки:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Тангенциальное ускорение связано с угловым ускорением формулой:

$$a_\tau = \varepsilon R.$$

В таблице 1-5 даны уравнения поступательного и вращательного движений материальной точки.

Таблица 1-5.
Уравнения поступательного и вращательного движений

Поступательное движение	**Вращательное движение**
1 Равномерное	
$x = x_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
$v = const$	$\omega = const$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
2 Равнопеременное	
$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$a = const$	$\varepsilon = const$
3 Неравномерное	
$x = x(t)$	$\varphi = \varphi(t)$
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Задача 1-13

Колесо радиусом $r=10$ *см* вращается с угловым ускорением $\varepsilon=3$ *рад/с* .
По истечении одной секунды после начала движения ($\omega_0=0$) найти для точки на ободе колеса:

1) Угловую скорость ω;
2) Линейную скорость v;
3) Нормальное ускорение a_n;
4) Тангенциальное ускорение a_τ;
5) Полное ускорение a;
6) Угол α между вектором $\vec{a}$ и радиусом, проведенным из рассматриваемой точки обода;
7) Полное ускорение по модулю и направлению в начальный момент времени $t=0$ и при $t \to \infty$.

Решение задачи 1-13

1) При равнопеременном вращении угловая скорость изменяется во времени по закону: $\omega=\omega_0+\varepsilon t$, где $\omega_0=0$ и тогда $\omega=\varepsilon t$, т.е. угловая скорость растёт пропорционально времени. При t=1 *с*, $\omega = 3$ *рад/с.*

2) Линейная скорость точки обода: $v=\omega R=\varepsilon\cdot R\ t$, т.е. линейная скорость также пропорциональна времени. При $t = 1$ *с*, $v = 0{,}3$ *м/с.*

3) Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$, т.е. не зависит от времени. $a_\tau = 0{,}3$ *м/с*^{2}.

4) Нормальное ускорение: $a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 R t^2$, т.е. растёт пропорционально квадрату времени. В момент t=1 *с*, $a_n = 0{,}9$ *м/с*^{2}.

5) Полное ускорение растёт со временем по закону:

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\varepsilon^2R^2+\varepsilon^4R^2t^4}=\varepsilon^2R^2\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}\ .$$

При t=1 *с*, a=0,95 *м/с.*

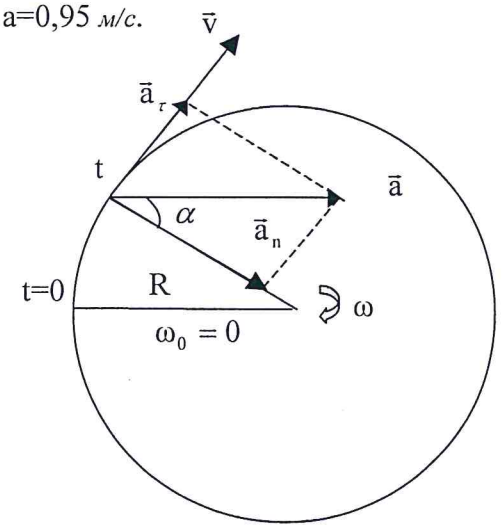


Рис. 1-30.
Кинематические характеристики точки обода колеса, движущиеся по закону:
$\omega = \varepsilon t$

6) $\mathrm{Sin}\alpha = \dfrac{a_\tau}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}}$

При t=1 *с*, $\mathrm{Sin}\alpha = 0{,}32; \alpha \approx 18^\circ$.

7) В начальный момент при t=0 получим $\mathrm{Sin}\alpha = 1$, или $\alpha = \pi/2$ и $a = a_\tau$.

Полное ускорение равно по модулю тангенциальному и направлено по касательной.

При очень большом t ($t \to \infty$) имеем $\alpha = 0$ и $a = a_n$.

Последнее следует из того, что с ростом t $a_\tau = \mathrm{const}$, a_n растёт пропорционально квадрату времени. Полное ускорение направлено по нормали.

Задача 1-14

Автомобиль движется с постоянной скоростью $\vec{v}_n = 72$ *км/час* по горизонтальной плоской дороге. Его колесо катится без проскальзывания и имеет радиус R=0,4 *м.*

1) Найти, с какой угловой скоростью ω вращается колесо?
2) Каковы скорости точек B, C и D (Рис.1-31)?
3) Найти ускорения точек A, B, C и D.

4) Какие точки диска колеса имеют относительно неподвижного наблюдателя ту же (по модулю) скорость, что и центр диска?
Дано: $v_п$=72 *км/час*; R=0,4 *м*;
Найти: ω; v_B; v_C; v_D; a_A; a_B; a_C; a_D.

Решение задачи 1-13

1) Каждая точка колеса участвует в двух движениях – в поступательном, со скоростью $\vec{v}_п$ и во вращательном движении вокруг центра O с угловой скоростью ω. Т.к. отсутствует проскальзывание колеса в точке соприкосновения с плоскостью, то скорость обода колеса в точке A равна нулю для наблюдателя, связанного с землёй. Это значит, что в точке A скорость поступательного движения $\vec{v}_п$ равна по модулю и противоположна по направлению скорости вращательного движения $\vec{v}_г$ (Рис. 1-31а):

$$v_п = v_г = \omega R$$

$$\text{Откуда: } \omega = \frac{v_п}{R}$$

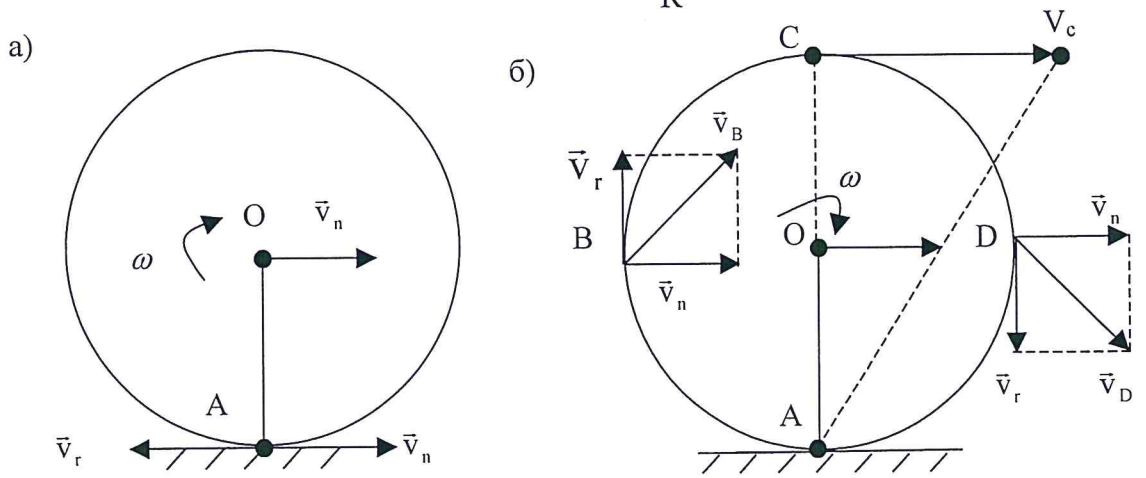


Рис. 1-31.
Скорости точек A, B, C и D обода колеса.
$\vec{v}_п$ - скорость поступательного движения.
$\vec{v}_г$ - скорость вращательного движения.

2) На рисунке (1-31б) скорость обода колеса в точке B: $\vec{v}_B = \vec{v}_п + \vec{v}_г$. Поскольку $v_г = v_п$, то $v_B = v_п \cdot \sqrt{2}$ и образует угол 45° с горизонтом. Скорость в точке D по модулю та же: $v_D = v_п \cdot \sqrt{2}$. В точке C $\vec{v}_п$ и $\vec{v}_г$ направлены в одну сторону: $v_C = 2v_п$ и направлена горизонтально.
3) В системе отсчёта, связанной с центром колеса, все его точки вращаются с угловой скоростью ω, а плоскость дороги движется со скоростью $\vec{v}_п$. Т.к. $\omega = \frac{v_п}{R}$, $v_п$ не меняется, то неизменной будет ω. В этом случае все точки колеса имеют только

центростремительное ускорение. Для точек обода колеса:

$$a_z = \omega^2 R = \frac{v_n^2}{R}$$

Направление $\vec{a}_z$ - к центру колеса.

Т.к. система отсчёта движется без ускорения ($\vec{v}_n = \text{const}$), то в неподвижной системе отсчёта ускорения точек диска останутся теми же.

4) Мгновенная скорость точек диаметра АС возрастает прямо пропорционально расстоянию до точки А. Поэтому движение точек колеса в данный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг оси, проходящей через точку А перпендикулярно плоскости колеса. Эта ось называется мгновенной осью вращения. Следовательно, в данный момент времени все точки колеса, отстоящие от точки А на одно и то же расстояние, будут иметь одну и ту же суммарную скорость по модулю относительно неподвижной системы отсчёта.

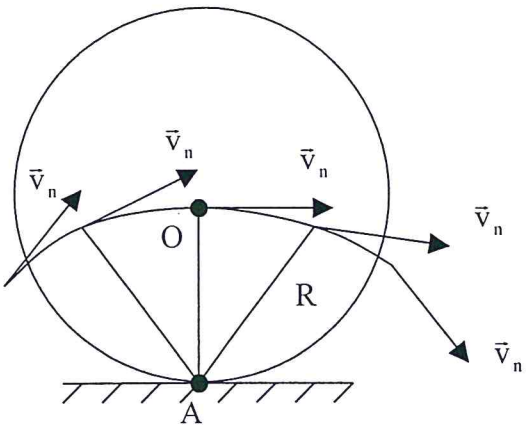


Рис. 1-32
Точки колеса, находящиеся на расстоянии R от мгновенной оси вращения, имеющие скорость $\vec{v}_n$

Все точки, находящиеся на расстоянии радиуса колеса R от мгновенной оси, будут иметь одну и ту же скорость v_n, что и центр колеса О (Рис.1-32).

Найдём численные значения найденных величин в системе СИ:

$$\omega = \frac{v_n}{R} = 50\,\textit{рад/с};$$

$$v_B = v_D = v_n \cdot \sqrt{2} = 28{,}3\ \textit{м/с};$$

$$v_C = 2v_n = 40\ \textit{м/с};$$

$$a_z = \omega^2 R = \frac{v_n^2}{R} = 1000\ \textit{м/с}^2$$

2. ДИНАМИКА

Динамика – это раздел механики, в котором изучается движение материальных тел, которое происходит под действием приложенных сил. В основе механики лежат законы Ньютона.

Первый закон Ньютона, в сущности, постулирует существование инерционных систем отсчёта и называется законом инерции. Согласно этому закону материальная точка, на которую не действуют силы (а если действуют, то взаимно компенсируют друг друга), находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения по отношению к инерциальной системе отсчёта. Это состояние может быть изменено только под воздействием силы.

Второй закон Ньютона, называемый Основным законом динамики, устанавливает количественную связь между массой m движущейся материальной точки, её ускорением $\vec{a}$ и результирующей силой $\vec{F}$, действующей на материальную точку:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (2.1)$$

где $\vec{F}$ – геометрическая (векторная) сумма всех приложенных сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2.2)$$

n – число приложенных сил.

Из векторного соотношения (2.1) следует сонаправленность векторов ускорения и результирующей силы.

Второй закон Ньютона – фундаментальный закон. Он справедлив для любых тел и для сил любой природы в инерциальной системе отсчёта. Разумеется, вопросы о природе сил чрезвычайно важны в физике. Однако ими занимаются соответствующие разделы физики, но не механика. Для механики важно, что всякая сила, независимо от её природы, будучи приложенной к телу, равна произведению массы этого тела на сообщенное этой силой ускорение.

С другой стороны, второй закон Ньютона, записанный в формуле (2.1), по сути является уравнением движения. Действительно, за ускорением в (2.1) "скрывается" изменение координат со временем (вторая производная координат по времени):

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Решив уравнение (2.1) найдём изменение координат с течением времени, т.е. положение движущегося тела в любой момент времени. А это и есть основная задача механики. Чтобы составить это уравнение и решить его, нужно не только знать силу, действующую на тело, но и так называемые начальные условия – координаты тела и его скорость в некоторый начальный момент времени.

Может быть решена и обратная задача. Если закон движения тела известен, т.е. заданы $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, уравнение движения (2.1) позволяет найти силу, приложенную к телу. Уравнение (2.1) и все следствия из него справедливы лишь для движений в инерциальных системах отсчёта.

Третий закон Ньютона обычно формулируют так: два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по модулю и направленными по одной прямой в противоположные стороны. Условно эти силы получили название "действующей" и "противодействующей" сил, подчёркивая тем самым, что они приложены к разным телам. Этот закон исключает одностороннее действие и допускает лишь взаимодействие тел. Другими словами: если тело 1 действует на тело 2 силой $\vec{F}_{1,2}$, то неизбежно тело 2 действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{2,1}$, причём:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \qquad (2.3)$$

В этом суть третьего закона Ньютона.

Во времена Ньютона и вплоть до начала 20 века считалось, что законы Ньютона справедливы для всевозможных движений всех без исключения тел. Однако, механика Ньютона оказалась неприемлема тогда, когда тела движутся со скоростями, соизмеримыми со скоростью света. Связано это с тем, что взаимодействие между телами передаётся не мгновенно (как считалось в механике Ньютона), а с конечной скоростью – скоростью света. Когда скорость движения тела близка к скорости передачи взаимодействия, законы механики становятся иными и описываются релятивистской механикой Эйнштейна (механики теории относительности). В формулы этой теории всегда входит отношение скорости тела к скорости света $\frac{v}{c}$. Когда это отношение близко к нулю, формулы релятивистской механики превращаются в формулы механики Ньютона. Поэтому появление теории относительности не привело к отказу от механики Ньютона.

Механика Ньютона совершенно неприменима к движению микрочастиц, составляющих молекулы и атомы. Здесь явления микромира описываются новой теорией – квантовой механикой. Появление этой теории отнюдь не повлияло на механику Ньютона, которая остаётся незыблемой для тех движений, для которых была создана.

Об основной задаче механики.

Законы Ньютона позволяют решить основную задачу механики: определить положение тела в любой момент времени, зная, действующие силы и начальные условия (скорость и координаты в начальный момент).

В простых случаях, например, когда силы постоянны, основная задача механики разделяется на две подзадачи: в первой решаются уравнения динамики и находится ускорение, во второй (кинематическая подзадача) по ускорению и начальным условиям рассчитывается движение в любой момент времени. В более сложных случаях, когда нельзя чётко разграничить подзадачи, расчёт поручают компьютеру. Важно, что основная задача механики в принципе разрешима, если в какой-то момент (один и тот же), ускорения взаимодействующих тел однозначно зависят от их координат и скоростей. Триумфальное шествие классической механики продолжалось 150 лет. К началу 19 века физики почти поверили в её всемогущество. Возникло убеждение, что ньютоновская механика способна объяснить устройство мира: всё в Мире сводится к движению взаимодействующих частиц (механистическое воззрение). Однако, вместе с механицизмом возникла философская проблема: если Мир – механическая система, то для него можно решить основную задачу механики. Т.е., зная о Мире всё в какой-либо

момент времени, можно, в принципе, рассчитать дальнейший ход событий и восстановить все события прошлого. Лаплас считал, что всё в мире предопределено и не может быть изменено никоим образом (лапласовский детерминизм). Человеческий ум не мог смириться с отсутствием свободы и искал выход из тупика. В первую очередь "под подозрение" попали дальнодействующие силы (всемирного тяготения и кулоновские). В них действительно есть что-то сверхестественное: мы сдвигаем одну частицу, а другая, на большом расстоянии, уже "знает" об этом и ускоряется чуть по-другому. В шестидесятые годы 20 века Максвелл построил теорию электромагнитного поля – новой материальной субстанции, через посредство которой осуществляются электрические и магнитные взаимодействия. В работах Максвелла поле отделилось от вещества и обрело независимость в виде электромагнитных волн (радиоволны, свет, рентгеновские лучи и др.). Их скорость распространения в вакууме: с = 300000 *км/с*. Именно с такой скоростью, а не мгновенно, передаётся информация о смещении одного из взаимодействующих зарядов к другому. Что означает это запаздывание? Сила, действующая на заряд в некоторый момент времени, определяется теперь не тем, где находятся и как движутся другие заряды (в тот же момент времени), а тем, что с ними происходило в предшествующие моменты. В такой ситуации уже невозможно решить основную задачу механики.

В 1905 году Эйнштейн показал, что такими свойствами должны обладать любые взаимодействия, т.к. никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Однако, когда скорость тела много меньше скорости света, $v \ll c$, законы Ньютона прекрасно работают. Здесь эффекты запаздывания несущественны.

В системе СИ силы измеряются в ньютонах (*Н*).

Силы трения.

Силы трения, возникающие при соприкосновении твёрдых тел, действуют вдоль поверхности соприкосновения и направлены так, что препятствуют их движению друг относительно друга. Эти силы называют силами сухого трения. Характерной особенностью сухого трения является наличие зоны трения покоя: тело нельзя сдвинуть по отношению к другому телу пока модуль внешней силы не превысит определённой величины. Сила трения покоя, действующая между поверхностями соприкасающихся тел, уравновешивает внешнюю силу и растёт вместе с ней. Максимальная величина силы трения покоя $F_{fr.max}$ выражается формулой:

$$F_{fr.max} = \mu \cdot N_r$$

где μ – коэффициент трения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей (степень шероховатости и волнистости поверхностей, характера плёнок, покрывающих поверхности и др.); N_r – модуль силы нормальной реакции, возникающей при приложении принимающей нагрузки.

Когда величина внешней силы превышает значение $F_{fr.max}$, возникает проскальзывание. Сила трения скольжения F_{fr} обычно слабо зависит от скорости относительного движения и оказывается немного меньше, чем $F_{fr.max}$. Сила трения скольжения так же пропорциональна силе нормальной реакции и не зависит от размеров площади соприкосновения. F_{fr} всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости относительного движения тел.

Решая задачи, обычно пренебрегают разницей между максимальной силой трения покоя и силой трения скольжения. Так же пренебрегают изменением силы трения скольжения при изменении скорости.
Сделав эти допущения, в дальнейшем при решении задач можно считать:

$$F_{fr.max} = F_{fr} = \mu \cdot N_r \qquad (2.4)$$

Движению тел в жидкости и газе препятствуют силы жидкого трения. Главное отличие жидкого трения от сухого – отсутствие зоны трения покоя: даже малая внешняя сила способна вызвать движение тела. Сила жидкого трения при малых скоростях пропорциональна скорости, а при больших – квадрату скорости движения.

Задачи к разделу 2 и их решения

Задача 2-1

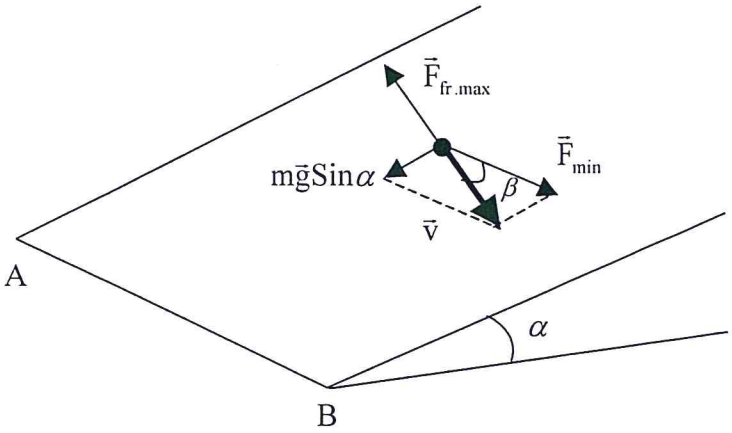


Рис. 2-1.
Силы, действующие на шайбу, расположенные в плоскости наклона под углом α к горизонту.
$\vec{F}_{min}$ - искомая сила;
$m\vec{g}Sin\alpha$ - составляющая силы тяжести на наклонную плоскость;
$\vec{F}_{fr.max}$ - максимальная сила трения покоя, равная силе трения скольжения;
$\vec{v}$ - скорость движения шайбы.

На плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит шайба массы m.
1) Какую минимальную силу $\vec{F}_{min}$ надо приложить к шайбе в горизонтальном направлении параллельно ребру AB наклонной плоскости, чтобы она начала двигаться? Коэффициент трения шайбы μ.
2) Под каким углом β к горизонту начнёт двигаться шайба и какова будет её траектория, если $\vec{F}_{min}$ в процессе движения не изменяется ни по модулю, ни по направлению?
Дано: α, μ, m
Найти: F_{min}; β

Решение задачи 2-1

Если тело лежит на наклонной плоскости с углом α, то сила трения направлена вверх вдоль плоскости и равна: $F_{fr} = mgSin\alpha$.
Согласно условию задачи, тело не соскальзывает.
Следовательно: $F_{fr} \leq \mu N_r = \mu\ mgCos\alpha$ или $tg\alpha \leq \mu$
где N_r – сила нормальной реакции.

Теперь приложим к шайбе небольшую горизонтальную силу $\vec{F}$, направленную вдоль плоскости (Рис. 2-1) и будем увеличивать её модуль. При этом $\vec{F}_{fr}$ будет изменяться и по модулю и по направлению. Когда величина силы трения покоя $F_{fr} = \sqrt{(mgSin\alpha)^2 + F_{min}^2}$ достигнет максимального значения:

$$F_{fr.max}=\mu N_r=\mu mgCos\,\alpha$$

начнётся скольжение шайбы по наклонной плоскости в сторону, противоположную направлению (этот момент изображен на Рис. 2-1). Искомую силу F_{min} найдём из равенства:

$$\mu mgCos\alpha = \sqrt{(mgSin\alpha)^2} + F_{min}^2$$

$$F_{min} = mg\sqrt{\mu^2 Cos^2\alpha - Sin^2\alpha}$$

$$F_{min} = mgCos\alpha\sqrt{\mu^2 - tg^2\alpha}\,,\ \text{при}\ \mu \geq tg^2\alpha\,.$$

Угол β найдём из Рис. 2-1:

$$tg\beta = \frac{mgSin\alpha}{mgCos\alpha\sqrt{\mu^2 - tg^2\alpha}} = \frac{tg\alpha}{\sqrt{\mu^2 - tg^2\alpha}}$$

Поскольку угол β=const в процессе движения, то траектория – прямая линия.

Попытаемся в заключение проверить правильность решения для частных случаев с заранее известным исходом.

А. Пусть $tg\alpha \ll \mu$. Тогда $F_{min}=\mu mgCos\alpha$; $tg\beta=tg\alpha/\mu$. Если при этом положить $\alpha=0$, то: $F_{min}=\mu mg$; $\beta=\alpha=0$ при любом μ.

Это ожидаемый результат, поскольку на горизонтальной плоскости (α=0) направление скорости движения совпадает с приложенной силой, т.е. β=0, модуль её равен: $F_{min} = F_{fr.\,max} = \mu\, mg$.

Б. Пусть $tg\alpha=\mu$. В этом случае начнётся движение шайбы вниз по наклонной плоскости вдоль направления $m\vec{g}\,Sin\alpha$, т.е. $\beta=\pi/2$. При этом нет никакой необходимости в наличии силы $\vec{F}_{min}$. Действительно, для этого частного случая из выражений для F_{min} и tg β имеем

$$F_{min} = mgCos\alpha\sqrt{\mu^2 - tg^2\alpha} = 0$$

$$tg\beta = \frac{tg\alpha}{\sqrt{\mu^2 - tg^2\alpha}} = \infty\,,\ \beta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Задача 2-2

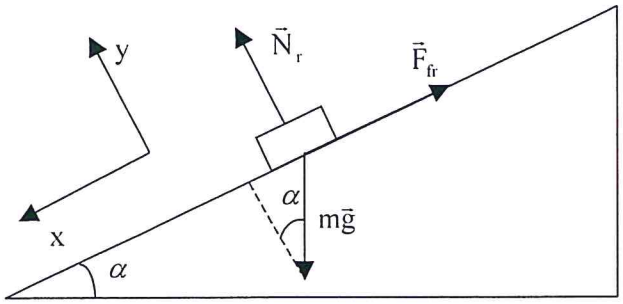


Рис. 2-2.
Силы, действующие на брусок.

Брусок массы m находится на плоскости, которая может изменять угол наклона с горизонтом α от нуля до 90°. Коэффициент трения μ. Считая, что сила трения скольжения $\vec{F}_{fr}$ равняется максимальной силе трения покоя $\vec{F}_{fr.max}$ и полагая, что $\vec{F}_{fr}$ не зависит от скорости скольжения бруска, построить график зависимости F_{fr} от α. (Рис.2-2)

Дано: m, μ, $0 \le \alpha \le 90°$

Найти: $F_{fr}(\alpha)$

Решение задачи 2-2

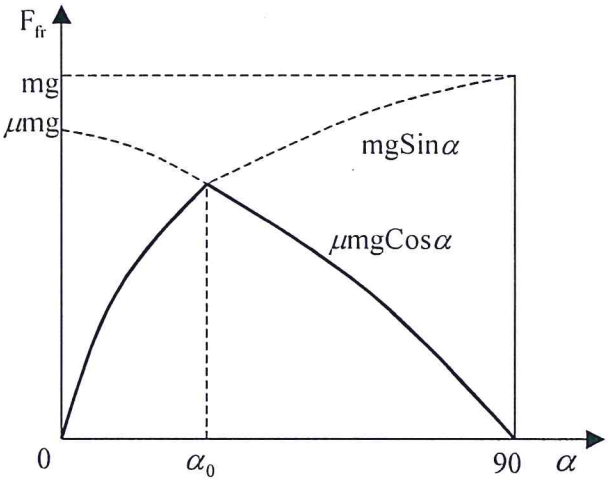


Рис 2-3. График зависимости силы трения от угла наклона плоскости к горизонту. α_0 - угол наклона, отвечающий максимальному значению силы трения покоя.

При увеличении угла α от α = 0° до некоторого α_0 брусок находится в покое, поскольку сила mgSinα уравновешивается силой трения покоя, возрастающей в пределах: $0 \le F_{fr} \le F_{fr.max}$.

Из условия равновесия бруска $m\vec{g} + N_2 + \vec{F}_{fr} = \vec{0}$ получим в проекциях на ось x:

$$mg\mathrm{Sin}\alpha - F_{fr} = 0;$$

$$F_{fr} = mg\mathrm{Sin}\alpha$$

для α, изменяющегося в пределах: $0 \le \alpha \le \alpha_0$

В интервале углов $\alpha_0 < \alpha \le 90°$ брусок движется и сила F_{fr} изменяется по закону

$$F_{fr} = F_{fr.max} = \mu mg\mathrm{Cos}\alpha$$

Последнее соотношение следует из условия, что сила трения скольжения всегда остаётся равной произведению коэффициента трения на нормальную реакцию:

$$F_{fr} = F_{fr.max} = \mu N_r$$

Из равновесия бруска получим в проекции на ось y

$$N_r - mg\mathrm{Cos}\,\alpha = 0$$

$$N_r = mg\mathrm{Cos}\,\alpha$$

Таким образом в интервале углов $\alpha_0 < \alpha \le 90°$ сила трения в зависимости от угла α изменяется по закону:

$$F_{fr} = \mu mg\mathrm{Cos}\,\alpha$$

Угол α_0 найдём из выражения:

$$mg\mathrm{Sin}\,\alpha = \mu mg\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\alpha_0 = \mathrm{arctg}\mu$$

Искомый график зависимости $F_{fr}(\alpha)$ изображен сплошной линией на Рис. 2-3. Как видно из чертежа, при значениях угла $\alpha_0=0^\circ$ и $\alpha=90^\circ$ сила $F_{fr}=0$. Максимальное значение силы трения отвечает углу $\alpha_0=\mathrm{arctg}\mu$.

Задача 2-3

На горизонтально расположенном столе лежат друг на друге два бруска, массы которых $m_1=0{,}4$ *кг* и $m_2=1$ *кг* (Рис. 2-4). К бруску m_1 приложена сила $F_1=3$ *Н* под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти ускорения брусков, если коэффициент трения брусков друг о друга $\mu_1=0{,}6$ и бруска m_2 о стол $\mu_2=0{,}1$. Известно, что соответствующие силы трения максимальны по модулю. При какой максимальной силе F_2 бруски будут двигаться как одно целое. Найти ускорение брусков a_3. При какой максимальной силе F_3 , бруски останутся в равновесии?

Дано: $m_1=0{,}4$ *кг;* $m_2=1{,}0$ *кг*; $F_1=3$ *Н*; $\mu_1=0{,}6$; $\mu_2=0{,}1$

Найти: a_1; a_2; F_2; a_3; F_3

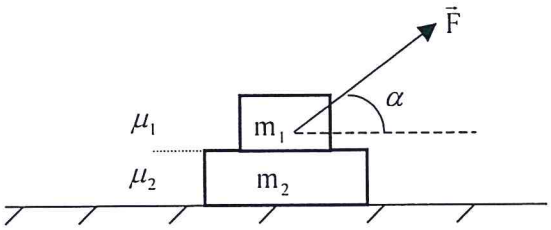


Рис. 2-4. Расположение брусков на горизонтальном столе.

Решение задачи 2-3

1) Рассмотрим, какие силы действуют на брусок m_1 и брусок m_2 порознь, учтя условие, что силы трения имеют максимальные значения (Рис. 2-5).

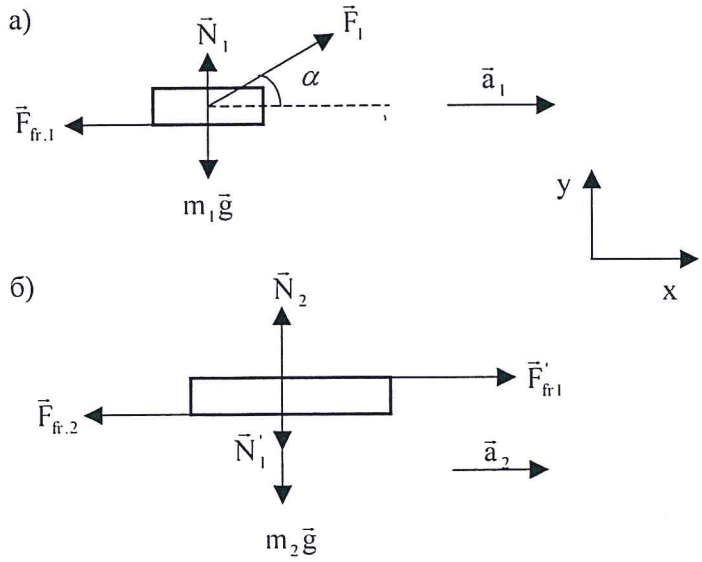


Рис.2-5.
а) Силы, действующие на брусок массы m_1.
б) Силы, действующие на брусок массы m_2
$\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ - ускорения брусков m_1 и m_2 соответственно.

Второй закон Ньютона для каждого бруска:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{F}_{fr1} + \vec{F}_1; \\ m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{F}_{fr2} + \vec{F}'_{fr1} + \vec{N}'_1; \end{cases}$$

где $N'_1 = N_1$; $F'_{fr1} = F_{fr1}$, согласно третьему закону Ньютона.
В соответствии с условиями задачи:

$$F_{fr1} = \mu_1 N_1$$
$$F_{fr2} = \mu_2 N_2$$

Проектируя на оси, имеем:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F_1 \cdot \mathrm{Cos}\alpha - \mu_1 N_1 \\ 0 = F_1 \cdot \mathrm{Sin}\alpha + N_1 - m_1 g \\ m_2 a_2 = \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 \\ 0 = N_2 - N_1 - m_2 g \end{cases}$$

Из первых двух уравнений найдём a_1:

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1} \cdot \mathrm{Cos}\alpha - \mu_1\left(g - \frac{F_1}{m_1} \cdot \mathrm{Sin}\alpha\right)$$

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1}\left(\mathrm{Cos}\alpha + \mu_1 \mathrm{Sin}\alpha\right) - \mu_1 g$$

Из последних двух уравнений системы найдём a_2:

$$m_2 a_2 = \mu_1\left(m_1 g - F_1 \mathrm{Sin}\alpha\right) - \mu_2\left(m_1 g - F_1 \mathrm{Sin}\alpha + m_2 g\right)$$

$$a_2 = \frac{m_1 g\left(\mu_1 - \mu_2\right)}{m_2} + \frac{F_1 \mathrm{Sin}\alpha\left(\mu_2 - \mu_1\right)}{m_2} - \mu_2 g$$

$$a_2 = \frac{\left(\mu_1 - \mu_2\right)\left(m_1 g - F_1 \mathrm{Sin}\alpha\right)}{m_2} - \mu_2 g$$

Подставляя численные значения, получим:

$a_1 = 0{,}23$ *м/с*^{2}; $a_2 = 2{,}9$ *м/с*^{2}

2) Найдём максимальную силу $\vec{F}_2$, при которой бруски движутся как одно целое. Для этого приравняем ускорения брусков $a_1 = a_2$.

$$F_2 \cdot \frac{\mathrm{Cos}\alpha + \mu_1 \mathrm{Cos}\alpha}{m_1} - \mu_1 g = \frac{\left(\mu_1 - \mu_2\right) m_1 g}{m_2} - \frac{\left(\mu_1 - \mu_2\right) F_2 \mathrm{Sin}\alpha}{m_2} - m_2 g$$

Откуда:

$$F_2 = \frac{\left(\mu_1 - \mu_2\right) \cdot g\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{\frac{\mathrm{Cos}\alpha + \mu_1 \mathrm{Sin}\alpha}{m_1} + \frac{\left(\mu_1 - \mu_2\right)\mathrm{Sin}\alpha}{m_2}}$$

При этом бруски будут иметь ускорение:

$$a_3 = \frac{F_2}{m_1}\left(\mathrm{Cos}\alpha + \mu_1 \mathrm{Sin}\alpha\right) - \mu_1 g$$

Подставляя численные значения, имеем:

$$F_2 \approx 2{,}2\ H;\ a_3 = 0{,}4\ м/с^2$$

3) Определим, при какой максимальной силе бруски останутся в равновесии. Для этого приравняем выражение для a_3 нулю и вместо F_2 подставим F_3:

$$0 = F_3/m_1\ (\mathrm{Cos}\alpha + \mu_1\ \mathrm{Sin}\alpha) - \mu_1 g$$

Откуда искомая сила:

$$F_3 = m_1 g\ \mu_1 / (\mathrm{Cos}\alpha + \mu_1 \mathrm{Sin}\alpha)$$

$$F_3 \approx 2\ H$$

Задача 2-4

Брусок массы m_1 лежит на горизонтальной плоскости. На бруске лежит тело массы m_2 (Рис.2-6). Коэффициент трения между телом и бруском, а также между бруском и плоскостью равен μ.

Исследовать движение при различных значениях силы $\vec{F}$, приложенной к бруску в горизонтальном направлении.

Дано: m_1, m_2, μ.

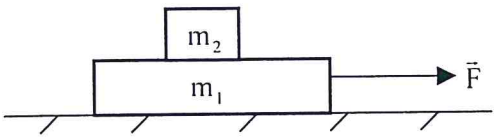


Рис. 2-6.
Брусок m_1 и m_2 на горизонтальной плоскости.
$\vec{F}$ – сила, действующая на брусок.

Решение задачи 2-4

1) Рассмотрим брусок и находящееся на нём тело, как одно целое, чтобы решить, при каких значениях силы движение отсутствует.

Условие равновесия системы в проекциях на ось x (Рис 2-7,а):

$$F \le \mu N_{r1};$$

$$N_{r1} = (m_1 + m_2)g;$$

$$F \le \mu(m_1 + m_2)g.$$

При условии $F \le \mu(m_1 + m_2)g$, движение отсутствует.

а)

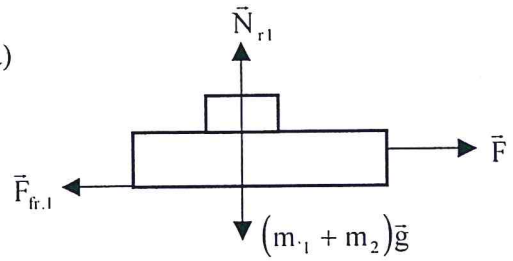
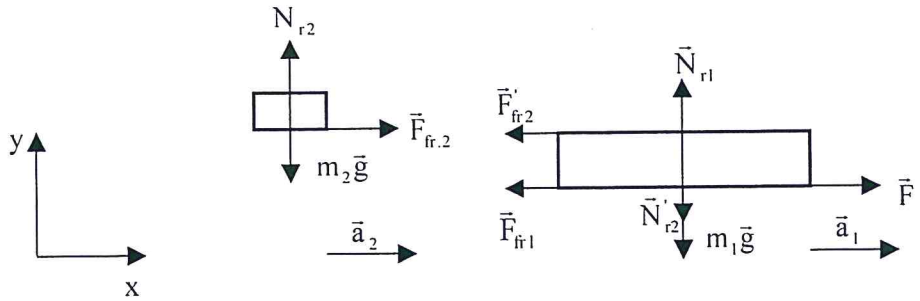


Рис. 2-7.
а) Брусок и тело рассмотрены, как одно целое массой $m_1 + m_2$.
б) Брусок и тело рассмотрены порознь с расстановкой всех сил.

б)



2) Брусок и находящееся на нём тело движутся с ускорением, как одно целое. Для нахождения интервала изменения силы $\vec{F}$ для этого случая, напишем второй закон Ньютона для бруска и тела порознь (Рис. 2-7б). При этом учтём, что согласно третьему закону Ньютона:

$$N'_{r2} = N_{r2}$$
$$F'_{fr.2} = F_{fr.2}$$

и максимальные значения сил трения:

$$F_{fr1} = \mu N_{r1}$$
$$F_{fr2} = \mu N_{r2}$$

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{F} + \vec{N}_{r1} + \vec{N}'_{r2} + \vec{F}_{fr1} + \vec{F}'_{fr2} \\ m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_{r2} + \vec{F}_{fr2} \end{cases}$$

Проектируя систему на оси и учитывая, что $a_1=a_2=a$, получим:

$$\begin{cases} m_1 a = F - \mu N_{r1} - \mu N_{r2} \\ 0 = N_{r1} - N_{r2} - m_1 g \\ m_2 a = \mu N_{r2} \\ 0 = N_{r2} - m_2 g \end{cases}$$

Решая систему:

$$\frac{F}{m_1} - \frac{\mu(m_1 + m_2)g}{m_1} - \frac{\mu m_2 g}{m_1} = \frac{\mu m_2 g}{m_2}$$

$$F=2\mu(m_1 + m_2).$$

Следовательно, чтобы тела двигались без взаимного проскальзывания, сила F должна быть в интервале:

$$\mu(m_1 + m_2)g < F < 2\mu(m_1 + m_2)g$$

3) Если значение действующей силы $F>2\mu(m_1 + m_2)g$, то тело будет скользить по бруску и ускорения их будут различны:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F - \mu(m_1 + m_2)g - \mu m_2 g \\ m_2 a_2 = \mu m_2 g \end{cases}$$

Откуда: $a_1=F/m_1 - \mu(m_1 + 2m_2)g/m_1$; $a_2=\mu g$.

Убедимся в том, что $a_1>a_2$:

$$a_1 > 2\mu(m_1+ m_2)g - \mu(m_1+ 2m_2)g/m_1 = \mu g(2m_1+ 2m_2 - m_1 - 2m_2)/m_1 = \mu g = a_2$$

Таким образом, ускорение бруска больше ускорения тела:

$$a_1 > a_2$$

Задача 2-5

На наклонной плоскости с углом наклона α неподвижно лежит кубик, причём коэффициент трения между кубиком и плоскостью равен μ.
Наклонная плоскость движется с ускорением, направленным вправо. При каком минимальном значении ускорения a_1 кубик начнёт соскальзывать вниз по наклонной плоскости (Рис.2-8а)?
Наклонная плоскость имеет ускорение влево (Рис.2-8б). При каком ускорении a_2 кубик начнёт подниматься?
Дано: α, μ.
Найти: a_1, a_2

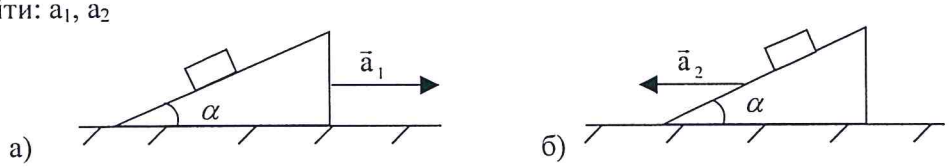


Рис. 2-8. Кубик на наклонной плоскости, которая в случае а) имеет ускорение $\vec{a}_1$, а в случае б) - ускорение $\vec{a}_2$.

Решение задачи 2-5

Построим график сил, действующих на кубик в обоих случаях (Рис. 2-9)
Кубик движется с тем же ускорением (по модулю и направлению), с которым движется наклонная плоскость в каждом из указанных в задаче случаев.

1) Рассмотрим случай а) (Рис.2-9). Напишем второй закон Ньютона для кубика:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N}_r + \vec{F}_{fr}$$

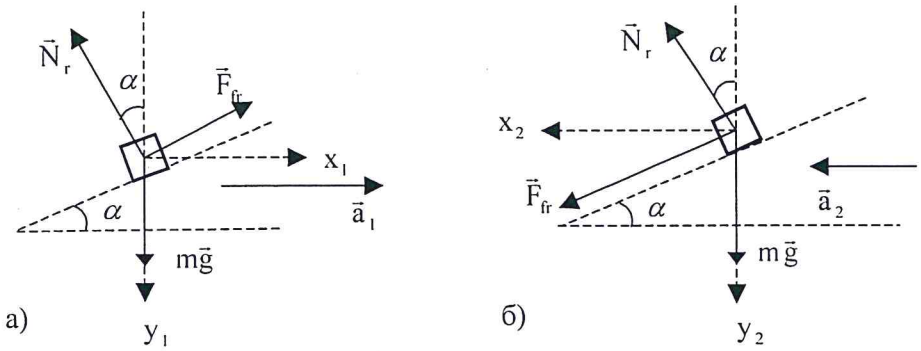


Рис. 2-9. Силы, действующие на кубик в случае, когда он движется: а) вниз по наклонной плоскости и б) вверх по наклонной плоскости.

Проектируя на оси x_1, y_1 получим:

$$\begin{cases} ma_1 = F_{fr}\mathrm{Cos}\alpha - N_r\mathrm{Sin}\alpha \\ 0 = mg - F_{fr}\mathrm{Sin}\alpha - N_r\mathrm{Cos}\alpha \end{cases}$$

Учтя, что при скольжении возникает максимальная сила трения: $F_{fr} = \mu N_r$, получим: $ma_1 = N_r(\mu Cos\alpha - Sin\alpha)$;

$$N_r = mg / (\mu Sin\alpha + Cos\alpha);$$

Откуда: $a_1 = g(\mu - tg\alpha) / (\mu\, tg\alpha + 1)$

Если $\mu = tg\alpha$, то кубик будет соскальзывать при любом сколь угодно малом ускорении.

2) Рассмотрим случай б) (Рис. 2-9). Второй закон Ньютона в векторной форме и в проекциях на оси x_2, y_2:

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}_r + \vec{F}_{fr}$$

$$\begin{cases} ma_2 = \mu N_r Cos\alpha + N_r Sin\alpha \\ 0 = mg + \mu N_r Sin\alpha - N_r Cos\alpha \end{cases}$$

$$N_r = mg / (Cos\alpha - \mu Sin\alpha);$$

$$a_2 = g(\mu + tg\alpha) / (1 - \mu tg\alpha)$$

Если $\mu \cdot tg\alpha = 1$, то ни при каких сколь угодно больших ускорениях, кубик не будет подниматься вверх по наклонной плоскости.

3. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Одним из самых уникальных механических свойств окружающих нас тел является их способность взаимно притягивать друг друга на расстоянии. Эти силы взаимного притяжения между телами получили название сил всемирного тяготения или гравитационных сил. Изучая движение небесных тел, Ньютон первым понял, что сила притяжения планеты к Солнцу является частным случаем силы тяготения, действующей между любыми двумя телами.

В простейшем случае взаимодействия тел малых размеров (по сравнению с расстоянием между телами) закон всемирного тяготения формулируется так:

любые две материальные точки притягивают друг друга с силой $\vec{F}_g$, направленной по линии их соединяющей, причём модуль силы прямо пропорционален их массам m_1 и m_2 и обратно пропорционален квадрату расстояния r между телами:

$$F_g = Gm_1m_2 / r^2$$

Здесь G – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц. В системе СИ:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Нм^2/кг^2,$$

G – одна из мировых констант, получившая название гравитационной постоянной.

Если взаимодействующие тела нельзя считать материальными точками (их размеры соизмеримы с расстоянием между телами), то каждое из тел необходимо мысленно разбить на столь малые части, чтобы каждую из них можно было бы считать материальной точкой. Для каждой пары материальных точек нужно записать закон тяготения и найти соответствующую силу тяготения. Далее следует сложить все полученные результаты, что даст приближенное значение силы тяготения между телами.

Примем без доказательства, что для центрально симметричных тел (шар, сферический слой и пр.) силу тяготения можно рассчитать по формуле для точечных масс (см. выше), понимая под r расстояние между центрами масс взаимодействующих тел.

Как будет подробнее сказано в разделе “Закон сохранения энергии”, гравитационные поля являются потенциальными (консервативными). Это значит, что работа поля при перемещении тела из точки 1 в точку 2 не зависит от формы траектории движения тела, а определяется лишь разностью потенциальных энергий в точках 1 и 2:

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}.$$

Найдём потенциальную энергию системы двух тел, массы которых M и m, и её зависимость от расстояния r между телами. Будем считать, что тело m находится в поле тела M (можно считать наоборот, т.к. это не повлияет на результат).

При перемещении тела m из точки 1, находящейся на расстоянии r_1 от тела M (Рис. 3-1) в точку 2, отстающую от тела M на расстояние r_2, поле совершает работу

$$A_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} - F_g(r)dr$$

Знак минус говорит об отрицательной работе, поскольку сила $\vec{F}_g$ направлена в сторону, обратную перемещению.

$$A_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM}{r^2}dr = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$

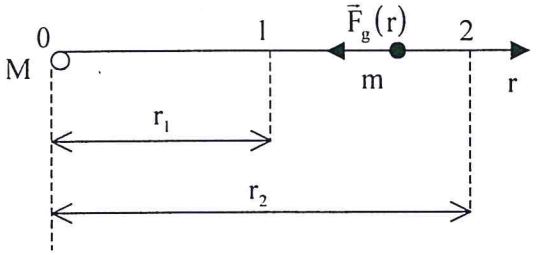


Рис. 3-1. Тело m перемещается в поле тела M из точки 1 в точку 2. Направление силы тяготения $\vec{F}_g(r)$ противоположно направлению перемещения тела m

Если точку 2 удалить в бесконечность, т.е. на столь большое расстояние от тела M, что сила $\vec{F}_g(r)$ становится пренебрежимо малой, то ($r_2 \to \infty$, $1/r_2 \to 0$).

Таким образом зависимость потенциальной энергии двух тяготеющих друг к другу масс M и m от расстояния между ними имеет вид:

$$E_p(r) = -GmM / r$$

при $E_p(\infty) = 0$. В этом случае говорят, что $E_p(r)$ нормирована на бесконечность.

В частности, потенциальная энергия системы тело–Земля, нормированная на бесконечность:

$$E_p = -GmM_{gl}/r \text{ для } r \le R_{gl},\ E_p(\infty) = 0,$$

где: M_{gl} – масса Земли, R_{gl} – радиус Земли.

E_p отрицательна при всех конечных значениях r до центра Земли и обратно пропорциональна этому расстоянию.

Из выражения для E_p системы тело–Земля можно получить хорошо известное выражение для E_p, когда тело m находится вблизи поверхности Земли и перемещается на высоту $\Delta h << R_{gl}$. В этом случае:

$$\Delta E_p = \left[-G\frac{mM_{gl}}{R_{gl}+\Delta h} - \left(-G\frac{mM_{gl}}{R_{gl}}\right)\right] = \frac{GmM_{gl}\Delta h}{\left(R_{gl}+\Delta h\right)R_{gl}} \approx m\frac{GM_{gl}}{R_{gl}^2}\Delta h$$

Из закона всемирного тяготения для тела массы m, находящемся на поверхности Земли, найдём ускорение свободного падения на поверхности Земли, g_0:

$$m\,g_0 = F_g = GmM_{gl}/ R_{gl}^2.$$

Откуда следует:

$$g_0 = GM_{gl}/ R_{gl}^2.$$

Формула для изменения потенциальной энергии:

$$\Delta E_p = mg\,\Delta h, \text{ где } \Delta h << R_{gl}.$$

Подсчитаем минимальную энергию, которую необходимо затратить, чтобы вывести космический корабль на круговую орбиту радиуса r с поверхности планеты радиуса R:

$$\frac{mv_b^2}{2} = \frac{mv_c^2}{2} + \Delta E_p,$$

где v_b – минимальная взлётная скорость корабля на поверхности земли, v_c – скорость на круговой орбите радиуса r, ΔE_p - изменение потенциальной энергии космического корабля:

$$\Delta E_p = GmM(1/R_{gl} - 1/r)$$

Скорость обращения корабля, который движется по круговой орбите в режиме спутника (двигатели выключены, сила сопротивления воздуха отсутствует, действует только сила тяготения F_{gr} найдём из второго закона Ньютона для корабля:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{gr}$$

$$\frac{mv_c^2}{r} = G\frac{mM_{gl}}{r^2}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_{gl}}{r}}$$

$$\frac{mv_b^2}{2} = \frac{GmM_{gl}}{2r} + GmM_{gl}\left(\frac{1}{R_{gl}} - \frac{1}{r}\right)$$

$$v_b(r) = \sqrt{GM_{gl}\left(\frac{2}{R_{gl}} - \frac{1}{r}\right)}$$

где $\vec{a}$ – центростремительное ускорение; v_c – круговая скорость; v_b – взлётная скорость. Если взять радиус орбиты $r = R_{gl}$, то:

$$v_b\left(R_{gl}\right) = \sqrt{\frac{GM_{gl}}{R_{gl}}} = v_1 = 7{,}9\ км/с.$$

Мы получили первую космическую скорость для Земли.

Пусть теперь $r \to \infty$, т.е. корабль, стартуя с поверхности Земли, преодолевает силу земного притяжения.

$$v_b(\infty) = \sqrt{\frac{2GM_{gl}}{R_{gl}}} = \sqrt{2} \cdot v_1 = v_2 = 11{,}2\ км/с.$$

Мы получили вторую космическую скорость для Земли. Корабль при этом будет двигаться по параболической траектории. Поэтому v_2 часто называют параболической скоростью относительно Земли.

Поскольку Земля является планетой Солнечной системы, то корабль, освободившись от земного тяготения, становится планетой Солнечной системы.

Задачи к разделу 3 и их решения

Задача 3-1

С поверхности Земли производится запуск космического корабля.

Найти взлётные скорости, позволяющие вывести корабль на круговую орбиту радиусом r, $v_b(r)$ на круговую орбиту вблизи поверхности Земли, v_b (R_{gl}), на лунную орбиту, v_b(gl – m). Вычислить первую космическую скорость Земли $\vec{v}_1$, орбитальную скорость Луны, а также соответствующие периоды полного обращения T_1 и T_2.

Найти вторую космическую скорость (параболическую) Земли $\vec{v}_2$.

Определить третью космическую скорость Земли $\vec{v}_3$.

Дано: $M_{gl} = 5{,}67 \cdot 10^{24}$ *кг*, $R_{gl} = 6{,}37 \cdot 10^3$ *км*, $R_{gl\text{-}m} = 384 \cdot 10^3$ *км*, $v_{orb.gl} = 29{,}76$ *км/с*, $M_s = 2 \cdot 10^{30}$ *кг*, $r_{s\text{-}gl} = 150 \cdot 10^6$ *км*.

Найти: $v_b(r)$, v_b (R_{gl}), $v_b(R_{gl\text{-}m})$, v_b ($r \to \infty$), T_1, T_2, v_1, v_2, v_3.

Решение задачи 3-1

Минимальная энергия, необходимая для выведения космического корабля на круговую орбиту радиусом r с поверхности Земли:

$$E = \frac{mv_b^2(r)}{2} = \frac{mv_c^2(r)}{2} + \Delta E_p, \text{ где}$$

$$\Delta E_p = GM_{gl}m\left(\frac{1}{R_{gl}} - \frac{1}{r}\right),$$

m – масса космического корабля,
v_b – взлётная скорость,
v_c – орбитальная скорость на круговой орбите радиуса r
ΔE_p – изменение потенциальной энергии, когда расстояние от центра земли меняется от R_{gl} до r.
M_{gl} – масса Земли.

Минимальная энергия, которую сообщат двигатели кораблю при взлёте:

$$E = \frac{mv_b^2(r)}{2} = GmM_{gl}\left(\frac{1}{R_{gl}} - \frac{1}{2r}\right),$$

Откуда
$$v_b(r) = \sqrt{GM_{gl}\left(\frac{2}{R_{gl}} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Положив $r = R_{gl}$, получим:

$$v_b\left(R_{gl}\right) = \sqrt{\frac{GM_{gl}}{R_{gl}}} = v_1 = 7{,}9 \text{ км/с},$$

v_1 – первая космическая скорость Земли.
Период обращения корабля–спутника на круговой орбите вблизи земной поверхности:

$$T_1 = \frac{2\pi R_{gl}}{v_1} = 5070 \text{ с} = 1{,}4 \text{ ч}.$$

Найдём взлётную скорость корабля, необходимую для запуска на орбиту радиусом $R_{gl\text{-}m}$ = 384000*км* (орбита Луны).

$$v_b\left(R_{gl-m}\right) = \sqrt{GM_{gl}\left(\frac{2}{R_{gl}} - \frac{1}{R_{gl-m}}\right)} = 11{,}1 \text{ км/с}$$

Орбитальная скорость $v_{c.m}$ и период обращения корабля на лунной орбите вокруг Земли, T_2:

$$v_{c.m} = \sqrt{\frac{GM_{gl}}{R_{gl-m}}} = 1{,}01 \text{ км/с}$$

$$T_2 = \frac{2\pi \cdot R_{gl-m}}{v_{c.m}} = 2{,}36 \cdot 10^6 \text{ s} = 27{,}3 \text{ дней}.$$

Последние две орбитальные характеристики космического корабля оказались в точности равными соответствующим характеристикам Луны, что подтверждает правильность расчётов.

Определим вторую космическую скорость земли v_2, т.е. найдём такую взлётную скорость с поверхности Земли, которая позволит космическому кораблю выйти за пределы земного притяжения и удалиться от Земли на произвольно большое расстояние ($r \to \infty$).

$$v_b(r \to \infty) = v_2 = \sqrt{GM_{gl}\left(\frac{2}{R_{gl}} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{GM_{gl}\frac{2}{R_{gl}}} = \sqrt{2} \cdot v_1 = 11{,}2 \text{ км/с},$$

где v_1 – первая космическая скорость Земли.

При этом корабль будет двигаться по параболической траектории. По этой причине $\bar{v}_2$ носит название параболической скорости относительно Земли (Рис. 3-2).

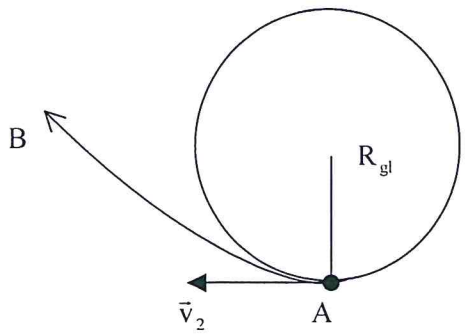


Рис. 3-2.
Запуск космического корабля из точки А земной поверхности со второй космической скоростью $\bar{v}_2$. После запуска корабль движется по параболе АВ.

Найдём третью космическую скорость Земли $\bar{v}_3$.

Чтобы преодолеть притяжение Солнца, кораблю необходимо сообщить параболическую скорость относительно Солнца v_{pr}, и вторую космическую скорость Земли, использовав систему отсчёта, связанную с Землёй.

$$v_{pr} = \sqrt{\frac{2GM_s}{r_{s-gl}}} = \sqrt{2} \cdot v_{c.gl} = 42{,}1 \text{ км/с},$$

где M_s – масса Солнца, $v_{c.gl}$ – орбитальная скорость Земли, r_{s-gl} – радиус орбиты Земли.

В системе отсчёта, связанной с Землёй, эта скорость равна:

$$v_{pr} - v_{c.gl} = 42{,}1\frac{км}{с} - 29{,}8\frac{км}{с} = 12{,}3 \text{ км/с}.$$

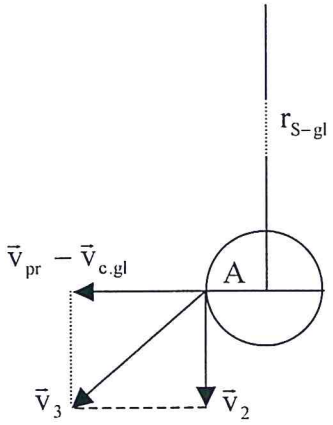


Рис. 3-3.
К расчёту третьей космической скорости $\vec{v}_3$.
$\vec{v}_{pr}$ - параболическая скорость корабля относительно Солнца.
$\vec{v}_{or.gl}$ - орбитальная скорость Земли.
$\vec{v}_{pr} - \vec{v}_{or.gl}$ - параболическая скорость корабля в системе отсчёта, связанной с Землёй.
$\vec{v}_2$ - вторая космическая скорость Земли.
r_{S-gl} - радиус орбиты Земли.

Для корабля, стартующего из точки А поверхности Земли (Рис. 3-3), взлётная скорость, позволяющая долететь до любого космического тела, расположенного в плоскости орбиты Земли за пределами Солнечной системы, $\vec{v}_3$:

$$v_3 = \sqrt{\left(v_{pr} - v_{c.gl}\right)^2 + v_2^2} = 16{,}7 \text{ км/с}.$$

Задача 3-2

Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны, $R_m = 1{,}74 \cdot 10^3$ *км*.
Какова должна быть взлётная скорость лунной кабины v_b, чтобы стыковка с базовым кораблём стала возможной без дополнительной коррекции скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_m = 1{,}7$ *м/с²*.
Дано: $R_m = 1{,}74 \cdot 10^3$ *км*, $g_m = 1{,}7$ *м/с²*.
Найти: v_b – ?

Решение задачи 3-2

Напишем второй закон Ньютона для космического корабля, имеющего скорость $\vec{v}_c$ на круговой орбите.

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

$$m\frac{v_c^2}{2R_m} = \frac{GmM_m}{\left(2R_m\right)^2},$$

где m – масса корабля, a_c – центростремительное ускорение, M_m – масса Луны.

Откуда:

$$v_c^2 = \frac{GM_m}{2R_m}$$

Связь взлётной скорости кабины на поверхности Луны v_b и её скорости на орбите корабля v_c, найдём из закона сохранения энергии кабины:

$$\frac{mv_b^2}{2} - \frac{GmM_m}{R_m} = \frac{mv_c^2}{2} - G\frac{mM_m}{2R_m}$$

Подставляя выражение для v_c, получим: $v_b = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{GM_m}{R_m}} = \sqrt{\frac{3}{2} g_m R_m} = 2{,}1$ *км/с*.

Дополнение к разделу 3

Что происходит со скоростью $\vec{v}$ и кинетической энергией E_k искусственного спутника Земли при торможении в атмосфере?

При движении по круговой орбите потенциальная энергия E_p, кинетическая энергия E_k и полная энергия E выражаются формулами:

$$E_p = -\frac{GmM}{r}$$

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{GM}{2} = \frac{GmM}{2r}$$

$$E = E_p + E_k = -\frac{GmM}{r} + \frac{GmM}{2r} = -\frac{GmM}{2r}$$

Откуда: $E_p = -2\,E_k = 2E$.

Сосчитаем, на какую величину Δr изменится радиус орбиты, если энергия спутника изменится на величину ΔE.

$$E = -\frac{GmM}{2r}$$

$$E + \Delta E = -\frac{GmM}{2(r+\Delta r)}$$

$$1 + \frac{\Delta E}{E} = -\frac{GmM}{2(r+\Delta r)}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{GmM}{2r}\right)} = \frac{r}{r+\Delta r}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{r}{r+\Delta r} - 1 = \frac{r - r - \Delta r}{r+\Delta r} = -\frac{1}{1+\frac{r}{\Delta r}} = -\frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta r = -\frac{r\Delta E}{E} = \frac{r\Delta E\cdot 2r}{GmM} = \frac{2r^2}{GmM}\cdot\Delta E$$

Таким образом, с увеличением энергии спутника, радиус его орбиты увеличивается и, наоборот, при уменьшении его энергии, радиус орбиты уменьшается.

Найдём связь между изменением скорости и изменением кинетической и полной энергии спутника.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_k + \Delta E_k = \frac{m}{2}(v+\Delta v)^2$$

Разделив обе части равенства на E_k, получим:

$$1 + \frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{m}{2}\cdot\frac{(v+\Delta v)^2}{E_k}$$

Возводя в квадрат и пренебрегая Δv^2: $\frac{\Delta E_k}{E_k} = 2\frac{\Delta v}{v}$;

Откуда: $$\Delta v = \frac{v}{2E_k}\cdot\Delta E_k$$

Учитывая, что $\Delta E_k = -\Delta E$, получим:

$$\Delta v = -\frac{v}{2E_k} \cdot \Delta E$$

Полученный результат говорит о том, что с увеличением энергии спутника ($\Delta E > 0$) его скорость и кинетическая энергия убывают и, наоборот, при уменьшении его энергии ($\Delta E < 0$) происходит возрастание скорости и кинетической энергии спутника. Найдём связь между периодом обращения спутника вокруг Земли T и радиусом r траектории:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

В таблицу 3-1 сведены результаты исследования зависимости орбитальных характеристик спутника от знака изменения орбитальной энергии ΔE.

Таблица 3-1.

Зависимость орбитальных характеристик спутника от знака изменения орбитальной энергии ΔE

Орбитальная характеристика	Обозначение	$\Delta E > 0$ (ускоряющая сила)	$\Delta E < 0$ (тормозящая сила)
Радиус орбиты	r	увеличивается	уменьшается
Период обращения	T	увеличивается	уменьшается
Линейная скорость	v	уменьшается	увеличивается
Кинетическая энергия	E_k	уменьшается	увеличивается
Потенциальная энергия	E_p	увеличивается	уменьшается

При торможении спутника в земной атмосфере тормозящая сила направлена против движения, т.е. изменение орбитальной энергии спутника ΔE всегда имеет отрицательный знак. В соответствии с таблицей, радиус орбиты, период обращения и потенциальная энергия будут убывать, следовательно, линейная скорость и кинетическая энергия должны расти. Теряемая потенциальная энергия частично переходит в кинетическую энергию, остальная переходит в тепло. Орбита спутника будет непрерывно сжиматься под действием торможения в атмосфере, и произойдёт постепенное увеличение скорости.

4. ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ФИЗИКЕ

После решения задачи, особенно, если решение было сложным, громоздким или сама задача принципиально новая, необходимо убедиться в правильности полученных результатов. Существует ряд способов, позволяющих быстро обнаружить ошибку путём исследования ответа. Заметим, что для этого не существует универсальной схемы. Рассмотрим несколько приёмов, которыми широко пользуются при решении физических задач. Это – проверка ответа на размерность, проверка на симметрию, анализ частных и предельных случаев и, наконец, сравнение ответа с ответом, полученным при решении задачи другим (или другими) методом. Во всех случаях самопроверки следует получить ответ в общем виде, т.е. в алгебраической (буквенной) форме.

Рассмотрим каждый из рекомендуемых приёмов проверки подробнее.

Проверка на размерность. Особенностью этой проверки является тот факт, что в ней нуждается почти каждая задача. При подстановке размерностей всех величин, входящих в полученную формулу ответа, должна получиться размерность искомой физической величины. Разумеется, все размерности должны быть выражены в одной международной системе единиц СИ. Для удобства проверки в ответе следует выделять безразмерные отношения и устойчивые размерные сочетания типа $\frac{v^2}{g}$ – размерность длины, $\sqrt{\frac{l}{g}}$ – размерность времени и т.п.

Проверка на симметрию. Она менее распространена и суть её состоит в следующем. Пусть в условии задачи имеются какие-либо одинаковые по размерности физические величины с индексами, нумерующими их. Если при перестановке индексов задача не изменяется, то говорят о симметрии этой задачи относительно указанных физических величин. Такая же симметрия должна быть и в ответе, т.е. ответ не должен изменяться при перестановке индексов тех же величин.

Проверка на частных и предельных случаях. Суть её состоит в выборе таких простейших значений физических величин задачи, для которых ответ очевиден. Далее проверяют, даёт ли полученная в ответе формула для этих частных и предельных значений такой же результат.

Проверка по результатам решения иным способом. Ряд типов задач позволяют решить их, используя принципиально разные подходы. К примеру, имеются механические задачи, решаемые как динамическим, так и энергетическим способами. Совпадение результатов обоих решений позволяет сделать заключение о большой степени достоверности ответа. Однако, эта проверка требует времени, что ограничивает её применение.

Мы постараемся на конкретных задачах показать использование некоторых из рассмотренных видов проверки.

Задачи к разделу 4 и их решения

Задача 4-1

Два груза массой m = 1 *кг* каждый связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок. На один из грузов кладут перегрузок массой $m_0 = 0{,}1$ *кг*.

Определить в процессе движения, считая нить нерастяжимой, блок и нить невесомыми, при отсутствии силы трения в блоке:

1) Ускорение $\vec{a}$ грузов.

2) Силу $\vec{T}$ натяжения нити.

3) Силу $\vec{P}'$, с которой перегрузок m_0 давит на груз m.

4) Силу $\vec{F}$, которую испытывает ось блока.

5) Время t после начала движения, когда грузы будут на одной высоте, если в начальный момент расстояние между ними равно h = 1 *м*.

Дано: m=1 *кг*; m_0=0,1 *кг*. Найти: $\vec{a};\vec{T};\vec{P}';\vec{F};t$.

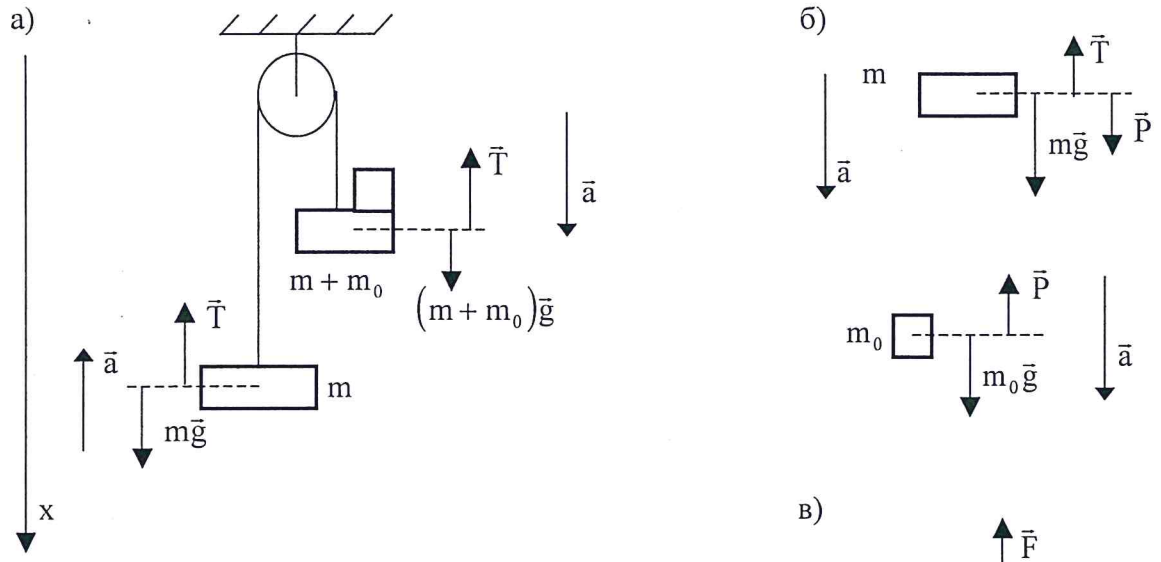


Рис. 4-1.
а) Силы, действующие на грузы, при их движении с ускорением $\vec{a}$ (правый груз m с перегрузком m_0 как одно целое).
б) Силы, действующие порознь на груз m (правый) и перегрузок m_0 при их движении с ускорением $\vec{a}$.
в) Силы, действующие на ось блока при движении грузов.

Решение задачи 4-1

Будем рассматривать тела в системе отсчёта, связанной с Землёй.
Напишем второй закон Ньютона для грузов m и $m + m_0$ порознь (Рис. 4-1а).

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \\ (m + m_0)\vec{a} = (m + m_0)\vec{g} + \vec{T} \end{cases}$$

Здесь ускорения грузов одинаковы, поскольку нить нерастяжима. Силы натяжения также равны для каждого из тел, т.к. по условию задачи массы нити и блока считаются пренебрежимо малыми, а трение в блоке отсутствует.
В проекциях на ось x:

$$\begin{cases} -ma = mg - T \\ (m + m_0)a = (m + m_0)g - T \end{cases}$$

Откуда:

$$a = g \cdot \frac{m_0}{2m + m_0}$$

$$T = 2mg \cdot \frac{m + m_0}{2m + m_0}$$

Силу давления перегрузка $\vec{P}'$ найдём из второго и третьего законов Ньютона (Рис. 4-1б):

$$\begin{cases} m_0\vec{a} = m_0\vec{g} + \vec{P} \\ \vec{P} = -\vec{P}' \end{cases}$$

В скалярной форме:

$$\begin{cases} m_0 a = m_0 g - P \\ P = P' \end{cases}$$

Решая систему:

$$P' = \frac{2mm_0}{2m + m_0} \cdot g$$

Определим силу $\vec{F}$, действующую на ось блока со стороны неподвижной опоры в процессе движения грузов (Рис.4-1в). Условия равновесия оси блока:

$$\vec{F} + 2\vec{T} = 0$$

На ось x:

$$F - 2T = 0$$

Откуда:

$$F = 4mg\frac{m + m_0}{2m + m_0}$$

Прежде, чем находить время t от начала движения грузов до момента их встречи на одном уровне, отметим, что каждый груз за время t пройдёт расстояние $\frac{h}{2}$. Это утверждение связано с нерастяжимостью нити и, следовательно, равенством по модулю перемещений, скоростей и ускорений каждого из двух грузов. Время найдём из кинематического уравнения для равноускоренного движения без начальной скорости:

$$\frac{h}{2} = \frac{at^2}{2}; t = \sqrt{\frac{h}{a}}$$

Откуда:

$$t = \sqrt{\frac{h}{g} \cdot \frac{(2m + m_0)}{m_0}}$$

Проведём проверку правильности полученных результатов. Проверка возможна тогда, когда результаты получены в общем виде.
Проверка по размерностям проводится во всех задачах для всех полученных физических величин.

Проверка к частным случаям состоит в анализе того, соответствует ли найденная физическая величина заранее известным её значениям для некоторых определённых условий. В данной задаче положим:

А) $m_0 = 0$; $m \neq 0$ (система в равновесии).

Ожидается: $a = 0$; $T = mg$; $P' = 0$; $F = 2mg$; $t = \infty$.

Анализ полученных значений всех физических величин приводит к тем же результатам.

Б) $m = 0$; $m_0 \neq 0$ (перегрузок свободно падает).

Ожидается: $a = g$; $T = 0$; $P' = 0$; $F = 0$; $T = \sqrt{\frac{h}{g}}$. Из найденных значений получаем те же результаты.

Найдём числовые значения искомых величин в соответствии с условиями задачи.

$$a = gm_0 \quad 2m+m_0) \quad 0{,}5\ м/с^2$$

$$T = 2mg(m+m_0) \quad 2m+m_0) \quad 10{,}3\ Н$$

$$P' = g \cdot \frac{2mm_0}{2m + m_0} \approx 0{,}9\ Н$$

$$F = 4mg \cdot \frac{m + m_0}{2m + m_0} \approx 20{,}6\ Н$$

$$t = \sqrt{\frac{h}{g} \cdot \frac{2m + m_0}{m_0}} \approx 1{,}5\ с$$

Задача 4-2

Искусственный спутник, используемый в системе телесвязи, запущен в плоскости земного экватора так, что всё время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус R орбиты спутника больше радиуса Земли R_{gl}. Принять $R_{gl} = 6400$ *км* , $g = 9{,}8$ *м/с*^{2}.

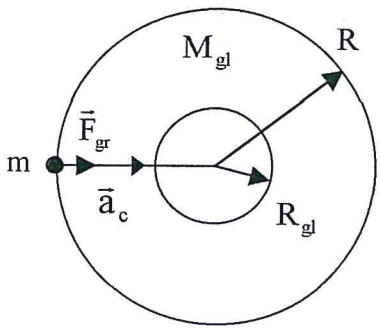


Рис. 4-2. Спутник телесвязи на орбите.
M_{gl}, R_{gl} - масса и радиус Земли.
m, R – масса спутника и радиус его орбиты.

Решение задачи 4-2

Угловая скорость спутника ω равна угловой скорости Земли ω_{gl}. Следовательно:

$$\omega = \omega_{gl} = \frac{2\pi}{T},$$

где T - период обращения Земли вокруг своей оси.

На спутник действует одна сила $\vec{F}_{gr}$ – сила тяготения. Второй закон Ньютона для спутника: $m\vec{a}_c = \vec{F}_{gr}$, где $a_c = \omega^2 R$ – центростремительное ускорение, действующее на спутник.

$$m\omega^2 R = \frac{GmM_{gl}}{R^2}$$

Поскольку $g = \frac{GM_{gl}}{R_{gl}^2}$, $\omega^2 = \frac{GM_{gl}}{R^3} = \frac{g}{R_{gl}}\left(\frac{R_{gl}}{R}\right)^3$. Далее: $\left(\frac{R}{R_{gl}}\right)^3 = \frac{g}{R_{gl}} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$;

$$\frac{R}{R_{gl}} = \sqrt[3]{\frac{g}{R_{gl}} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}}$$

Подставляя численные значения в системе СИ: $\frac{R}{R_{gl}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \cdot 24^2 \cdot 3600^2}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}} \cong 6{,}7$.

Приведённая задача иллюстрирует следующее основное положение в решении физических задач: решение любой задачи по физике состоит из двух частей – физической и математической. Пока мы обдумываем условие задачи, анализируем ситуацию и решаем, какие физические законы следует применить и какую систему уравнений необходимо составить – мы физики. После этого наступает второй этап, когда мы – математики, и перед нами стоят иные проблемы: как наиболее рационально решить систему уравнений. Во всех случаях ответ нужно найти в общем (буквенном) виде. Затем мы вновь обращаемся к физике. Необходимо проверить размерности каждой искомой величины и конечного результата на предмет их правдоподобия. И лишь на последнем этапе можно подставить числовые значения.

Однако иногда после расчётов получается абсурдный результат, что свидетельствует о неверном решении. Рассмотрим подобную задачу.

Задача 4-3

На вершине наклонной плоскости укреплён блок, через который переброшена нить. К концам нити прикреплены два тела: $m_1 = 3$ *кг* и $m_2 = 2$ *кг*.

Найти ускорение системы и силу трения между первым телом и плоскостью, если коэффициент трения $\mu = 0{,}5$ и угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$ (Рис. 4-3).

Дано: $\alpha = 30°$; $m_1 = 3$ *кг*; $m_2 = 2$ *кг*; $\mu = 0{,}5$.

Найти: a; F_{fr}.

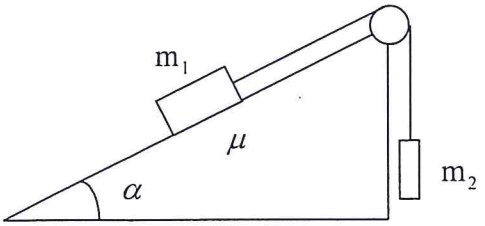


Рис. 4-3.
К условиям задачи 4-3.

Решение задачи 4-3

Условия задачи не указывают, куда ускоряется система и движется ли она. Если система движется, то на тело m_1 действует сила трения $F_{fr} = \mu \cdot N_r$, где N_r – модуль силы нормальной реакции. Если же система покоится, на тело m_1 действует сила трения покоя, о которой известно лишь, что она не превышает силу трения скольжения.

Предположим, что движение грузов таково, что блок вращается по часовой стрелке (Рис. 4-4).

В соответствии с предположением проведём расстановку сил для каждого тела в отдельности и напишем уравнения Второго закона Ньютона для каждого тела.

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_r + \vec{F}_{fr} + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \end{cases}$$

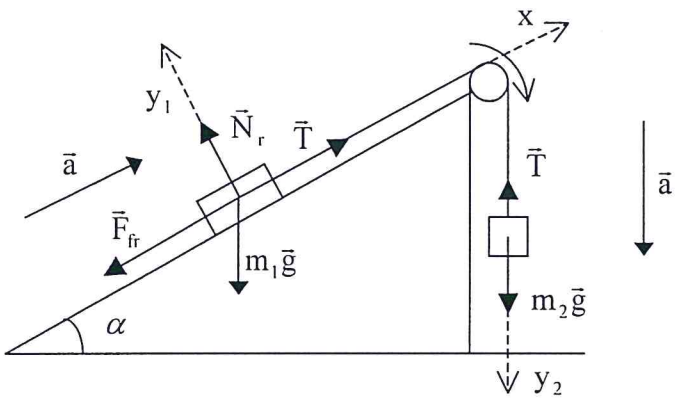


Рис. 4-4
Расстановка сил в случае, когда движение грузов вращает блок по часовой стрелке.

В проекциях на оси:

$$\begin{array}{c} x \\ y_1 \\ y_2 \end{array}\left|\begin{cases} m_1a = T - \mu N_r - m_1 g \mathrm{Sin}\alpha \\ N_r - mg\mathrm{Cos}\alpha = 0 \\ m_2a = m_2g - T \end{cases}\right.$$

Решая систему, получим: $a = g\dfrac{m_2 - \mu m_1 \mathrm{Cos}\alpha - m_1 \mathrm{Sin}\alpha}{m_1 + m_2} = -1{,}6$ *м/с²*. Получилось, что проекция ускорения отрицательна. Это значит, что наше предположение неверно. Казалось бы, что система должна двигаться в обратном направлении. Проверим это.

Предположим движение системы таковым, что блок вращается против часовой стрелки (Рис. 4-5).

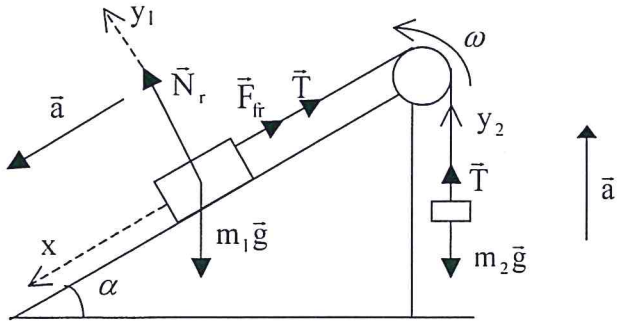


Рис.4-5.
Расстановка сил в случае, когда движение грузов вращает блок против часовой стрелки.

При этом система уравнений будет:

$$\begin{array}{c} x \\ y_1 \\ y_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} m_1 a = m_1 g \mathrm{Sin}\alpha - T - \mu N_r \\ N_r - m_1 g \mathrm{Cos}\alpha = 0 \\ m_2 a = T - m_2 g \end{array}\right.$$

Решая систему, получим:

$$a = g\frac{m_1 \mathrm{Sin}\alpha - \mu m_1 \mathrm{Cos}\alpha - m_2}{m_1 + m_2} = -3{,}6\,м/с^2.$$

Таким образом, новое предположение так же неверно.
Система покоится, a = 0. Уравнения равновесия (Рис.4-6):

$$\begin{array}{c} x \\ y_1 \\ y_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} m_1 g \mathrm{Sin}\alpha - T + F_{fr} = 0 \\ N_r - m_1 g \mathrm{Cos}\alpha = 0 \\ T - m_2 g = 0 \end{array}\right.$$

$$F_{fr} = -\,m_1 g \mathrm{Sin}\alpha + m_2 g = 5\ Н.$$

Убедимся, что сила трения покоя $F_{fr} < \mu N_r = \mu\, m_1 g \mathrm{Cos}\alpha = 13\ Н$.
Таким образом, на тело m_1 действует сила трения покоя $F_{fr} = 5\ Н$ и направлена она вниз по наклонной плоскости.

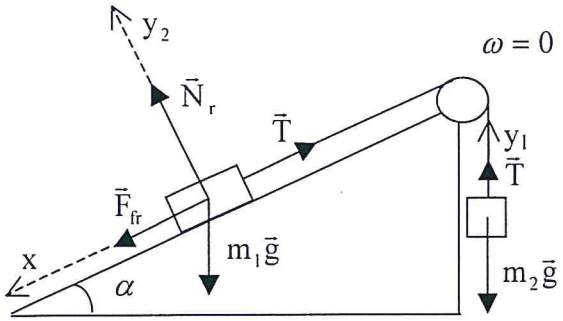


Рис. 4-6
Расстановка сил при равновесии системы грузов.

Задача 4-4

На невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз массой $m_1 = 1$ *кг* (Рис. 4-7). К подвижному блоку прикреплён груз массой $m_2 = 4$ *кг*. Определить ускорения грузов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ и силу натяжения нити $\vec{T}$. Блоки невесомы.

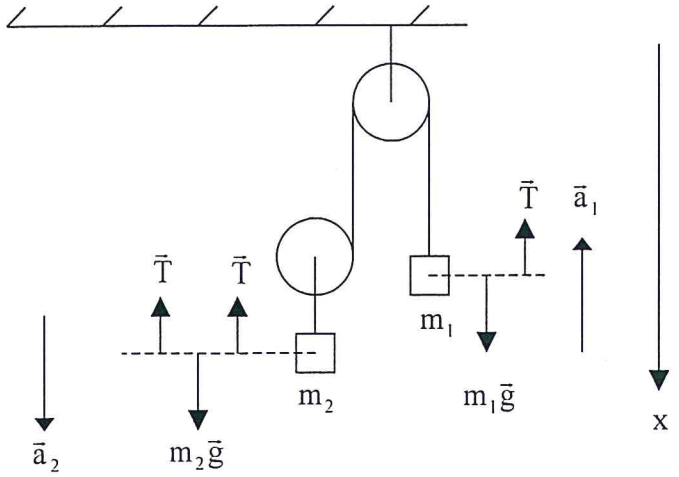


Рис. 4-7.
Силы, действующие на грузы m_1 и m_2.

Решение задачи 4-4

Будем рассматривать движения тел относительно Земли. Все движения грузов могут быть такими, при которых длина нити не изменяется (нить нерастяжима). На Рис. 4-4 показаны силы, действующие на каждый из грузов. Т.к. по условию задачи нить и блоки невесомы, то натяжение нити $\vec{T}$ во всех точках нити одинаково.

Напишем второй закон Ньютона для каждого груза в отдельности в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T} \\ m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + 2\vec{T} \end{cases}$$

Система неполная, т.к. в двух уравнениях 3 неизвестных: a_1, a_2, T. Третье уравнение получим из условия нерастяжимости нити: если груз m_1 опустился вниз на расстояние L_1, то это вызовет перемещение груза m_2 вверх на перемещение L_2, равное половине L_1. Аналогичные соотношения справедливы для модулей скоростей и ускорений: $L_1=2L_2$; $v_1 = 2v_2$; $a_1 = 2a_2$. Последнее равенство, $a_1 = 2a_2$, является недостающим для системы. Таким образом, написана полная система из трёх уравнений с тремя неизвестными. Что касается направлений векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, то известно лишь то, что они противоположны по направлению.

Предположим, что ускорение $\vec{a}_1$ направлено вверх вдоль оси x. Тогда ускорение второго груза $\vec{a}_2$ будет иметь направление вниз. Если предположение окажется неверным, то a_1 и a_2 окажутся отрицательными после решения системы уравнений. В этом случае следует изменить их направления на противоположные.

Напишем систему в проекциях на ось x:

$$\begin{cases} -m_1a_1 = m_1g - T \\ m_2a_2 = m_2g - 2T \\ a_1 = 2a_2 \end{cases}$$

Решение системы уравнений в общем виде:

$$a_1 = 2\frac{(-2m_1 + m_2)}{4m_1 + m_2}\cdot g; a_2 = \frac{(-2m_1 + m_2)}{4m_1 + m_2}\cdot g; T = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}\cdot g$$

Обратим внимание на то, что если $m_2 = 2m_1$, то: $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $T = m_1g$, т.е. система окажется в равновесии.

Если $m_2 < 2m_1$, то груз m_1 будет опускаться, груз m_2 – подниматься и сила $T < m_1g$.

Если $m_2 > 2m_1$, то грузы будут двигаться в обратном направлении и $T > m_1g$.

Таким образом, решение системы в общем виде позволило определить условия, при которых грузы будут совершать те или иные движения.

Подставляя численные значения в системе СИ, получим:

$$a_1 = 2g(m_2 - 2m_1) / (4m_1 + m_2) = 5\ м/с^2;$$
$$a_2 = g(m_2 - 2m_1) / (4m_1 + m_2) = 2{,}5\ м/с^2;$$
$$T = 3m_1m_2g / (4m_1 + m_2) = 15\ Н.$$

Наше предположение о движении грузов оказалось верным: груз m_1 с ускорением $a_1 = 5\ м/с^2$ поднимается, а груз m_2 с ускорением $a_1 = 2{,}5\ м/с^2$ опускается.

5. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

Если на движущееся тело действует сила $\vec{F}$,неизменная по модулю и направлению, то совершаемая ею **работа**, A ,выражается соотношением:

$$A = F \cdot S \cdot \mathrm{Cos}\alpha \qquad (5.1)$$

Работой силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{S}$ называется физическая скалярная величина, равная произведению модулей силы и перемещения точки её приложения на косинус угла α между векторами силы и перемещения (Рис. 5-1). Знак работы зависит от знака $\mathrm{Cos}\alpha$:

$$A > 0, \text{ если } \alpha < 90°,$$
$$A < 0, \text{ если } 90° < \alpha \leq 180°,$$
$$A = 0, \text{ если } \alpha = 90°.$$

В системе единиц СИ работа измеряется в джоулях (*Дж*):

$$[A] = 1 Н{\cdot}м = 1\ кг\,м^2/с^2 = 1\ Дж.$$

Следует особо отметить, что работа постоянной по модулю и направлению силы не зависит от формы траектории движения тела. Действительно, по какой бы траектории не двигалось тело от точки O к точке B (Рис.5-1), его перемещение остаётся равным $\vec{S}$ и работа $A = F \cdot S \cdot \mathrm{Cos}\alpha$.

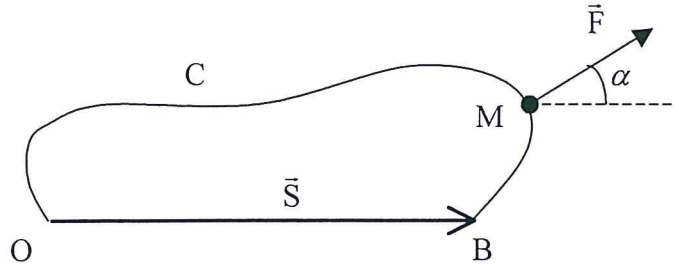


Рис. 5-1.
M – тело, совершающее движение по произвольной траектории OCB.
$\vec{S}$ - вектор перемещения. $\vec{F}$ - сила, действующая на тело M под углом α к вектору перемещения.

Рассмотрим далее, как вычисляется работа в общем случае, когда сила в процессе движения тела меняется произвольным образом и траектория имеет любую форму. Ясно, что в этом случае для определения работы формула (5.1) не может быть использована.

Чтобы определить работу переменной силы, разобъём весь путь тела на n столь малых перемещений $\Delta\vec{r}_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$, чтобы на каждом из них силу $\vec{F}_i$ можно было бы считать постоянной (Рис.5-2). Тогда работа на перемещении $\Delta\vec{r}_i$ будет равна, согласно (5.1):

$$\Delta A_i = F_i \cdot \Delta r_i \cdot \mathrm{Cos}\alpha_i \qquad (5.2)$$

где α_i - угол между векторами $\vec{F}_i$ и $\Delta\vec{r}_i$.

В силу малости, $|\Delta\vec{r}_i|$ можно приравнять его приращению пути ΔS_i, и произвести замену в выражении (5.2):

$$|\Delta\vec{r}_i| = \Delta S_i$$
$$\Delta A_i = F_i \cdot \Delta S_i \cdot \mathrm{Cos}\alpha$$

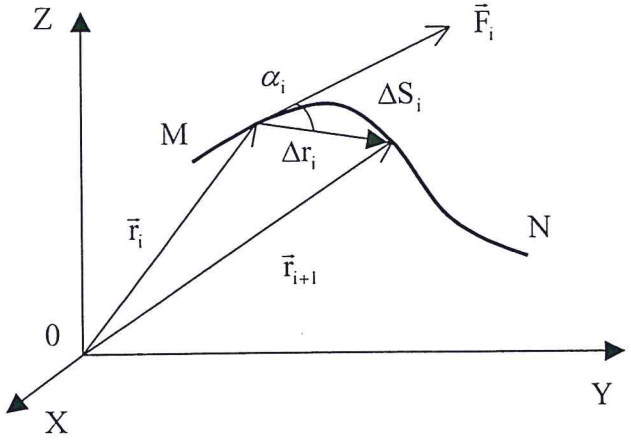


Рис. 5-2.
MN – участок траектории движения.
$\Delta r_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ - малое перемещение.
ΔS_i – малое приращение пути.
$\vec{F}_i$ - значение силы, действующей на перемещении $\Delta\vec{r}_i$.

Работа на всём пути вдоль траектории:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta S_i \mathrm{Cos}\alpha_i$$

Для получения точного выражения необходимо перейти к пределу:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta S_i \mathrm{Cos}\alpha_i$$

Этому подсчёту отвечает математическая операция интегрирования вдоль пути перемещения точки приложения силы:

$$A = \int_S F\mathrm{Cos}\alpha dS = \int_S F_S dS \qquad (5.3)$$

где dS – элементарное перемещение; α - угол между направлением силы и касательной к траектории точки её приложения; F_s - проекция силы на направление касательной.

Найдём выражение работы для нескольких простейших случаев.

1) При движении тела проекция силы на направление касательной в каждой точке траектории остаётся постоянной. В этом случае $F_s = F\mathrm{Cos}\alpha$ можно вынести за знак интеграла:

$$A = F_s \int_S dS = F_s \cdot S \qquad (5.4)$$

где S – длина пути, измеренного вдоль траектории. Когда проекция силы на направление касательной на всём пути движения точки её приложения остаётся постоянной, работа силы равна произведению проекции силы на длину пути.

Пример 1. Тело движется вниз по наклонной плоскости. Работа, совершаемая силой тяжести $m\vec{g}$ на пути, равном длине наклонной плоскости S, если α - угол наклона и h – высота, будет:

$$A = mg\mathrm{Sin}\alpha \cdot S = mgh$$

Здесь $F_S = mg\mathrm{Sin}\alpha = \mathrm{const}$

При движении вверх по наклонной плоскости:

$$A = -mgSin\alpha \cdot S = -mgh$$

Работа силы тяжести зависит от высоты, на которую поднялось или опустилось тело.

Пример 2. Тело движется вдоль траектории произвольной формы с трением, не зависящим от скорости. Найдём работу силы трения.

$$F_S = -F_{fr} = const, \text{ т.к. } Cos\alpha = -1$$

$A = -\int\limits_S F_{fr} dS = -F_{fr} S$, где S – длина пути вдоль траектории.

2) Сила F остаётся постоянной по величине и направлению, в то время как тело движется по кривой траектории. В этом случае $F_S \neq const$, но F = const и выносится за знак интеграла: $A = F\int\limits_S Cos\alpha \cdot dS$. Под интегралом стоит проекция элементарного перемещения на направление силы, а весь интеграл – проекция перемещения на направление силы.

$A = F \cdot S_F$, что тождественно соотношению (5.1)

Примером может быть работа силы $m\vec{g}$, действующая на тело, которое движется по траектории произвольной формы.

Поскольку проекция перемещения на направление силы тяжести – это изменение высоты h, то работа силы тяжести зависит от изменения высоты тела: $A = \pm\, m \cdot g \cdot h$ независимо от траектории движения.

Во всех случаях работа, совершаемая силой тяжести при перемещении тела ,не зависит от формы траектории его движения, а определяется лишь высотой, на которую в итоге поднялось или опустилось тело. Следует при этом помнить, что изменение высоты должно быть малым в сравнении с радиусом Земли, чтобы силу тяжести можно было считать постоянной.

3) Практически важен случай, когда работа совершается силой упругости. Пусть к телу M прикреплена растянутая пружина, второй конец которой укреплён неподвижно. Найдём работу, которую совершит сила $\vec{F}$, действующая на тело со стороны пружины при перемещении тела от точки 1 в точку 2 с координатами от положения равновесия x_1 и x_2 соответственно (Рис.5-3).

Пусть известно, что сила действия пружины подчиняется закону Гука:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad (5.5)$$

Где $\vec{x}$ – удлинение пружины, k – коэффициент жёсткости пружины.

Чтобы рассчитать работу силы $\vec{F}$ на участке 1-2 (Рис.5-3), нужно вычислить определённый интеграл, взятый в пределах x_1, x_2:

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = -\int\limits_{x_1}^{x_2} kxdx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

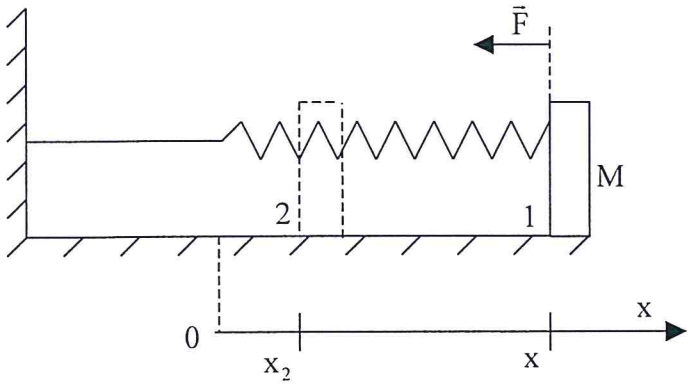


Рис. 5-3.
$\vec{F}$ - сила, с которой действует растянувшаяся пружина на тело М.
x_1, x_2 – координаты начального и конечного положения тела, соответственно.
Точка О отвечает положению нерастянутой пружины.

$$A = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) \qquad (5.6)$$

Можно легко показать, что работа силы пружины зависит лишь от положений начальной и конечной точек, между которыми произошло перемещение конца пружины, но не от формы пути, по которому это перемещение произошло. Сказанное справедливо для любых тел, в которых при деформации возникают упругие силы, подчиняющиеся закону Гука.
Свойством независимости работы от формы траектории обладают также силы, действующие на электрически заряженные тела, помещенные в электрическое поле.

Механической мощностью называется физическая величина, измеряемая отношением работы к промежутку времени, за который эта работа совершена. Если работа производится равномерно во времени, то мощность определяется формулой:

$$N = \frac{A}{t} \qquad (5.7)$$

Если это отношение не остаётся постоянным, то для определения мощности следует брать столь малые промежутки Δt, чтобы дальнейшее их дробление не изменяло величины отношения $\frac{\Delta A}{\Delta t}$. В общем случае мощность выражается:

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \qquad (5.8)$$

где dA – элементарная работа, совершаемая за элементарный промежуток времени dt.
В системе СИ мощность выражается в ваттах (*Вт*):

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = 1 Дж/с = 1\ Вт = 1\ кг{\cdot}м^2/с^3 .$$

Элементарная работа: $dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha$, где dS – модуль бесконечно-малого перемещения точки приложения силы за время dt. Откуда:

$$N = \frac{dA}{dt} = F \cdot \frac{dS}{dt} \cos\alpha = F \cdot v \cdot \cos\alpha \qquad (5.9)$$

где v – модуль скорости точки приложения силы, α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$.
Последней формулой пользуются для определения мощности механизмов.

В механике различают два вида **энергии – кинетическую и потенциальную**.

Кинетическая энергия E_k измеряется работой, которую может совершить тело, обладающее скоростью $\vec{v}$. Чтобы определить E_k, нужно подсчитать работу, которую может совершить тело, обладающее начальной скоростью $\vec{v}_0$, до полной остановки. Эта работа равна той работе, которую нужно затратить, чтобы тому же телу, не обладающему начальной скоростью, сообщить скорость $\vec{v}_0$. Для определения E_k подсчитаем работу действующей на тело силы $\vec{F}$, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Рассмотрим прямолинейное движение вдоль оси x, совпадающей с постоянным направлением силы $\vec{F}$. Умножим обе части на элементарное перемещение:

$$dx = vdt$$

$$mvdv = Fdx$$

Обозначим на оси точку $x = x_1$, в которой $v_1 = 0$ и точку $x = x_2$, в которой $v_2 = v$.

$$\text{Тогда: } m\int_0^v vdv = \int_{x_1}^{x_2} Fdx \text{ или: } \frac{mv^2}{2} = A_{1,2}$$

В соответствии с полученным результатом, кинетическая энергия тела массы m, обладающей скоростью v, равна:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad (5.10)$$

Кинетическая энергия – величина относительная, связанная с выбором системы отсчёта, поскольку скорость зависит от системы отсчёта. Кинетическая энергия системы E_{ks} равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в систему:

$$E_{ks} = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \qquad (5.11)$$

Изменение кинетической энергии материальной точки при её перемещении из положения 1 в положение 2, происходящее под действием приложенных к этой точке сил равно алгебраической сумме работ всех этих сил на данном перемещении:

$$E_{k2} - E_{k1} = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (5.12)$$

Это соотношение выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки или поступательно движущегося тела.

Потенциальная энергия E_p – это энергия, зависящая от конфигурации системы, т.е. от возможного положения материальных точек, входящих в систему.

Отметим две важных особенности этого понятия. Во-первых, потенциальная энергия является характеристикой системы тел, что видно из её определения. Лишено физического смысла понятие потенциальной энергии одного тела. Даже если говорится

о E_p одного деформированного тела, то и тогда имеется ввиду энергия взаимного расположения частей этого тела, которые в данном случае рассматриваются как отдельные тела. Во-вторых, потенциальная энергия может служить характеристикой лишь для консервативных систем.

Консервативными называются такие системы, внутренние силы взаимодействия в которых при изменении конфигурации системы совершают работу, не зависящую от формы траектории движения точек приложения этих сил. Если система вернулась к прежней конфигурации, то работа всех этих сил должна быть равна нулю. Как мы успели убедиться, системы, в которых действуют гравитационные силы (в том числе сила тяжести), силы упругости, силы электростатического взаимодействия, подходят под определение консервативных систем.

При изменении конфигурации системы изменяется её потенциальная энергия и совершается работа. Изменение конфигурации системы связано лишь с состоянием системы в начале и в конце процесса и не зависит от промежуточных состояний. С другой стороны, только консервативные силы системы совершают работу, не зависящую от промежуточных состояний системы. Следовательно, изменение потенциальной энергии системы связано с работой лишь консервативных сил этой системы, поскольку лишь эти силы однозначно связаны с конфигурацией. Общей закономерностью является тот факт, что когда консервативные силы в системе совершают положительную работу, происходит такое изменение конфигурации, при котором потенциальная энергия системы уменьшается. Наоборот, если указанная работа отрицательна, то конфигурация изменяется так, что потенциальная энергия возрастает.

В общем случае, изменение потенциальной энергии системы равно взятой с обратным знаком работе внутренних консервативных сил A_k:

$$\Delta E_p = -A_k \qquad (5.13)$$

Если в системе кроме консервативных сил действуют неконсервативные (диссипативные) силы, например силы трения, то работа этих сил не изменяет потенциальной энергии системы.

Выясним, каков характер зависимости E_p от конфигурации системы вблизи положения равновесия. Напомним, что положение, в котором сумма действующих на тело сил равна нулю, называется положением равновесия.

Пусть положению равновесия соответствует значение координаты $x=x_0$. При перемещении тела на расстояние dx действующая на тело в направлении оси x сила $\vec{F}$ совершит работу $dA = Fdx$. Эта работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии:

$$-dE_p = Fdx \quad \text{или:} \quad -\frac{dE_p}{dx} = F$$

Так как. в положении равновесия при $x = x_0$ действующая на тело сила F=0, то

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$$

Т.е. в положении равновесия E_p достигает экстремального значения. Если при малом смещении тела от положения равновесия возникающая сила направлена к положению равновесия, то при удалении от положения равновесия эта сила совершает

отрицательную работу и E_p возрастает. Значит, в этом случае положению равновесия отвечает минимальное значение E_p (устойчивое положение равновесия). Если возникающая сила направлена от положения равновесия тела, то при малом удалении его от положения равновесия сила совершает положительную работу и E_p уменьшается. Положению равновесия в этом случае отвечает максимальное значение потенциальной энергии (неустойчивое положение равновесия).

Таким образом, признаками устойчивого и неустойчивого равновесия являются:

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

При этом, если $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$, то наблюдается устойчивое равновесие, а если $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$, то имеет место неустойчивое равновесие.

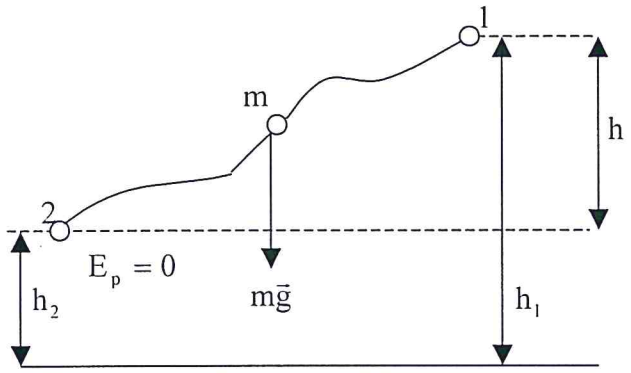


Рис 5-4.
Тело массы m движется по произвольной траектории из точки 1, расположенной на высоте h_1 от некоторого уровня до точки 2 на высоте h_2 от того же уровня.

Найдём формулы потенциальной энергии для нескольких наиболее распространённых случаев, учтя соотношение (5.13).

1) Найдём значения потенциальной энергии камня массой m, перемещаемого в поле тяготения Земли по некоторой траектории из точки 1 в точку 2 (Рис.5-4). Считаем, что ($h_1 - h_2$) настолько мала, что силу $m\vec{g}$ можно считать постоянной на всей траектории 1-2. Изменение потенциальной энергии системы камень-Земля: $E_{p2} - E_{p1} = -mg(h_1 - h_2)$. Поскольку выбор уровня нуля потенциальной энергии произвольный, выберем $E_{p2} = 0$ на уровне $h_2 = 0$ и обозначив $E_{p1} = E_p$ и $h_1 = h$, получим:

$$E_p = mgh \qquad (5.15)$$

Здесь h - расстояние от уровня $E_p = 0$ до уровня, на котором находится тело массой m. Если уровень положения тела выше нулевого уровня $E_p = 0$, то потенциальная энергия системы тело-Земля положительна. Если уровень тела ниже уровня $E_p = 0$, то потенциальная энергия системы отрицательна.

2) Найдём формулу для потенциальной энергии деформированной пружины с коэффициентом жёсткости K. Воспользуемся выражением (5.6) для работы упругой силы (Рис.5-3).

$$E_{p2} - E_{p1} = -\frac{K}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Для случая деформированной пружины удобно выбрать уровень $E_p = 0$ в точке O, где пружина не деформирована (точка равновесия). $E_{p2} = 0$ при $x_2 = 0$. Положив $E_{p1} = E_p$ и $x_1 = x$, получим:

$$E_p = \frac{Kx^2}{2} \qquad (5.16)$$

Формула (5.16) справедлива и для случая, когда пружина сжата.

3) Для нахождения формулы потенциальной энергии системы: планета массой M, тело массой m. Напишем изменение потенциальной энергии системы при перемещении тела из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории (Рис.5-5).

Рассмотрим работу гравитационной силы при перемещении тела массой m из точки 1 в точку 2 поля сил тяготения некоторой планеты (или другого массивного космического тела) массой M.

$$A = \int_S F_g dS \cdot \mathrm{Cos}\alpha$$

где элементарное перемещение dS и приращение $dr = -dS\mathrm{Cos}\alpha$.

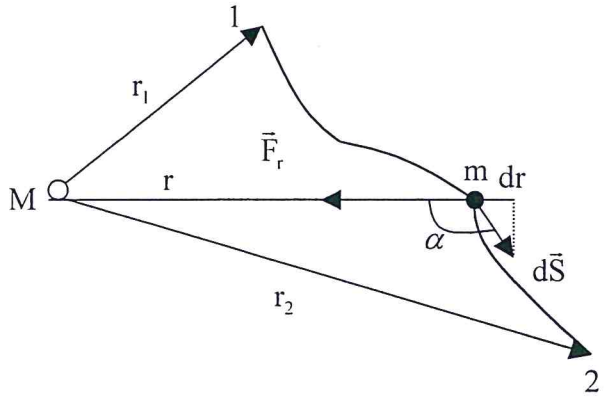


Рис. 5-5.
К выводу формулы для работы силы тяготения при перемещении тел массы m из точки 1 в точку 2. r_1, r_2 - расстояния до массивного тела массой M в точках 1 и 2 соответственно.

$$A = \int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{mM}{r^2}\right)dr = -GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Изменение потенциальной энергии системы:

$$E_{p2} - E_{p1} = -A = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

В гравитационных системах удобно выбрать $E_p = 0$ в бесконечно-удалённой точке, т.е. $E_{p2} = 0$, когда $r_2 = \infty$. Обозначим $E_{p1} = E_p$; $r_1 = r$.

$$E_p = -\frac{GmM}{r} \qquad (5.17)$$

где r – расстояние от тела до центра планеты. Отрицательное значение потенциальной энергии получено в связи с тем, что в качестве нулевой выбрана максимальная потенциальная энергия.

Задачи к разделу 5 и их решения

Задача 5-1

Две пружины с разными коэффициентами жёсткости соединены в точке О. В точке В пружины закреплены неподвижно, в точке С действует сила $\vec{F}$, изменяющаяся так, что происходит медленное растяжение пружин (Рис.5-6).

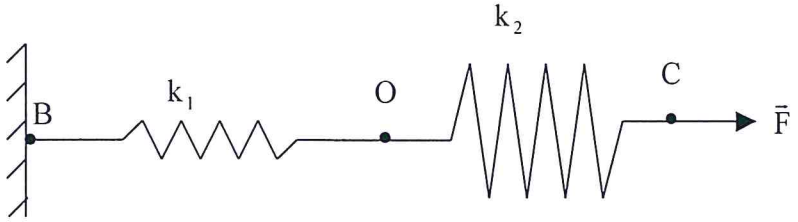


Рис. 5-6. Две пружины с коэффициентом жёсткости k_1 и k_2, соединенные в точке О. $\vec{F}$ - внешняя сила, приложенная к точке С (конец второй пружины). Точка В (начало первой пружины) жёстко закреплена.

1) Найти распределение потенциальной энергии в пружинах в зависимости от коэффициентов упругости пружин. Рассмотреть предельный случай, когда одна из пружин имеет бесконечно большой коэффициент жёсткости.
2) Устойчиво ли состояние равновесия, в котором находится точка О на рисунке 5-6, когда точка С закреплена в таком положении, что обе пружины несколько растянуты?

Решение задачи 5-1

1) Согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие со стороны пружины друг на друга равны. Поэтому: $K_1x_1 = K_2x_2$, где x_1 и x_2 - удлинения первой и второй пружины соответственно. Отсюда:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{K_2}{K_1}$$

Потенциальная энергия растянутых пружин:

$$E_{p1} = \frac{K_1x_1^2}{2}; E_{p2} = \frac{Kx_2^2}{2};$$

Откуда:

$$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{K_1}{K_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$$

Заменяя отношение $\frac{x_1}{x_2}$ через $\frac{K_2}{K_1}$, получим:

$$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{K_2}{K_1}$$

Последний результат говорит о том, что распределение потенциальной энергии в пружинах обратно отношению коэффициентов упругости пружин. Ясно, что вся

потенциальная энергия пружин создаётся за счёт работы внешней силы $\bar{F}$. Если у одной пружины коэффициент жёсткости много больше, чем у другой, то практически вся работа внешней силы идёт на увеличение потенциальной энергии более мягкой пружины (пружины с малым коэффициентом жёсткости).У очень жёстких (мало деформируемых тел, подобных пружине с $K \to \infty$) $E_p \to 0$, хотя $F = Kx$ остаётся конечной, т.к. с ростом K уменьшается деформация. Потенциальная энергия очень жёстких пружин стремится к нулю, поскольку: $\frac{Kx^2}{2} = \frac{F^2}{2K} \to 0$ при $K \to \infty$, F – конечном и $x = \frac{F}{K}$. По этой причине, вводя представление об абсолютно жёстких, недеформируемых телах, можно считать их энергию упругой деформации при любых конечных силах равной нулю.

2) Определим, устойчиво ли состояние равновесия, в котором находится точка O на рисунке 5-6, когда правый конец пружины (точка C) закреплён так, что обе пружины несколько растянуты. (Легко показать, что те же результаты будут получены для двух других конфигураций системы: когда обе пружины несколько сжаты или когда обе пружины не деформированы в положении равновесия). Сместим точку O относительно положения равновесия выбранной конфигурации предварительно растянутых пружин на величину x. Общая для обеих пружин потенциальная энергия:

$$E_p = \frac{K_1(x_1 + x)^2}{2} + \frac{K_2(x_2 - x)^2}{2} = \frac{K_1 x_1^2}{2} + K_1 x_1 x + \frac{K_1 x^2}{2} + \frac{K_2 x_2^2}{2} - K_2 x_2 x + \frac{K_2 x^2}{2}$$

Учтя, что $K_1x_1 = K_2x_2$, получим:

$$E_p = \frac{K_1 x_1^2}{2} + \frac{K_2 x_2^2}{2} + \frac{(K_1 + K_2)x^2}{2}, \text{ откуда: } \frac{dE_p}{dx} = (K_1 + K_2)x = 0 \text{ при } x = 0.$$

Следовательно, x = 0 отвечает экстремальному значению E_p (причём единственному), а с другой стороны соответствует положению равновесия.

Из последнего выражения для E_p легко видеть, что независимо от смещения x в ту или иную сторону от положения равновесия $E\ (x \neq 0) > E_p\ (x = 0)$.

Таким образом, единственный экстремум отвечает минимуму E_p системы, т.е. положение равновесия при x=0 является устойчивым.

Задача 5-2

Пружина, находящаяся между упором и телом массы m = 0,1 *кг*, сжата на длину x_0 = 0,1 *м* от положения равновесия (Рис.5-7). Коэффициент жёсткости пружины K = 5 *Н/м*.

1) Тело может без трения двигаться по гладкой плоскости. Какую работу A_1 совершит сила упругости пружины к моменту, когда тело проходит положение равновесия, при котором пружина не деформирована? Какую работу A_2 совершит сила упругости к моменту, когда тело окажется справа от положения равновесия на расстоянии x_1=0,08 *м* от него? Вычертить график зависимости силы упругости от положения тела.

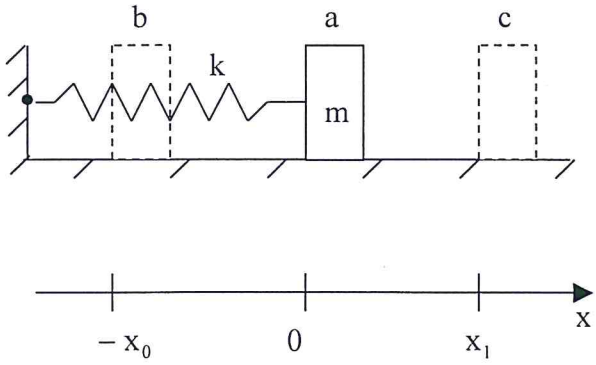


Рис.5-7.
Пружина с коэффициентом жёсткости K закреплена между упором и подвижным телом массы m.
a – пружина не деформирована (положение равновесия).
b – пружина сжата на длину x.
c– пружина растянута на длину x_1.

2) При наличии трения, какова будет максимальная координата x, по достижении которой скорость тела будет равна нулю, если коэффициент трения μ = 0,15, а начальная координата $x = -x_0$ ($x_0 = 0{,}1$ *м*)?

3) При каком значении μ_1 тело остановится в точке x =0? При каком минимальном μ_2 тело останется неподвижным в начальной точке $x = -x_0$?

4) Построить зависимость коэффициента трения μ от координаты x остановки тела ($-x_0 \le x \le x_0$).

Дано: m = 0,1 *кг*; $x_0 = 0{,}1$ *м*; K = 5 *Н/м*; $\mu = 0{,}15$; $x_1 = 0{,}08$ *м*.
Найти: A_1; A_2; μ_1; μ_2..

Решение задачи 5-2

1) Работа A_1, совершённая силой упругости пружины к моменту, когда тело проходит через точку O (пружина не деформирована):

$$A_1 = \frac{Kx_0}{2} \cdot x_0 = \frac{Kx_0^2}{2}; \; A_1 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$$

Работа A_1 положительна, поскольку направление силы упругости, совпадает с направлением перемещения тела (точки её приложения).

При дальнейшем движении тела до заданной координаты x_1 (Рис.5-7) упругая сила совершает отрицательную работу A'_1, т.к. её направление противоположно направлению движения тела:

$$A'_1 = -\frac{kx_1^2}{2}; \; A'_1 = -16 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$$

Работа A_2 силы упругости на всём перемещении от положения (-x) до положения x_1:

$$A_2 = \frac{Kx_0^2}{2} - \frac{Kx_1^2}{2} = \frac{K}{2}\left(x_0^2 - x_1^2\right); \; A_2 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

В частности, $A_2 = 0$ при $x_1 = x_0$.

Для графика зависимости силы упругости от координаты, выберем начало координат, совпадающим с точкой положения тела при недеформированной пружине, а направление оси OX - с направлением движения тела. График показан на Рис. 5-8а. Здесь заштрихованные площади соответствуют работе силы упругости: на участке ($-x_0$, 0) работа $A_1 > 0$, а на участке (0, x_1) работа $A'_1 < 0$.

2) Рассмотрим ту же систему при наличии трения между телом и плоскостью. Обозначим через x координату тела в тот момент, когда скорость тела равна нулю, так же, как и в начальный момент, когда $x=x_0$. Следовательно, равно нулю и изменение кинетической энергии тела и работа сил, действующих на тело, согласно теореме об изменении кинетической энергии: $A_{fl} + A_{fr} = 0$, где A_{fl} - работа силы упругости пружины, равная $A_{fl} = \frac{Kx_0^2}{2} - \frac{Kx^2}{2} = \frac{K}{2}(x_0 + x)(x_0 - x)$,

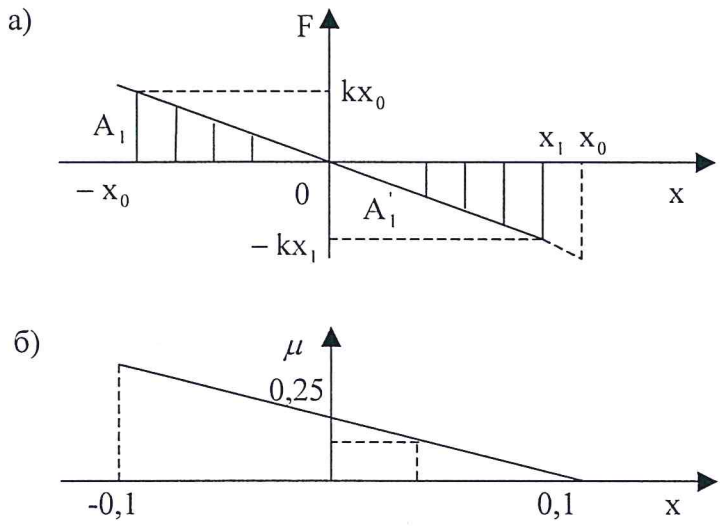


Рис. 5-8.
а) График зависимости силы упругости F от положения тела. Заштрихованные площади равны работам $A_1>0$ и $A'_1<0$, соответственно.
б) График зависимости коэффициента трения от координаты остановки тела. Начальная координата $x = -x_0$.

A_{fr} - работа силы трения, $A_{fr} = -\mu mg(x_0 + x)$. ($A_{fr} < 0$, т.к. $\vec{F}_{fr}$ направлена в сторону, обратную скорости движения от его начала до остановки).

$A_{fl} + A_{fr} = \frac{K}{2}(x_0 + x)(x_0 - x) - \mu mg(x_0 + x) = 0$. Отсюда координата остановки тела:

$$x = x_0 - \frac{2\mu mg}{K};\ x = 0{,}04\ м.$$

Для построения зависимости коэффициента трения от координаты остановки тела, получим функциональную зависимость $\mu(x)$ из последнего равенства:

$$\mu(x) = \frac{K(x_0 - x)}{2mg} = -\frac{K}{2mg}x + \frac{Kx_0}{2mg}$$

Таким образом, $\mu(x)$ - линейная зависимость. График $\mu(x) = -2{,}5x + 0{,}25$ представлен на рисунке 5-8б.

Значения μ и соответствующие им координаты x в момент, когда скорость тела равна нулю, сведены в таблицу 5-1.

Таблица 5-1.
Состояние пружины в зависимости от параметров μ и x.

x	μ	Состояние пружины в момент остановки тела.
$-x_0$; -0,1	$\frac{Kx_0}{mg}$; 0,5	Полностью сжата.
0; 0	$\frac{Kx_o}{2mg}$; 0,25	Не деформирована.
x_0; 0,1	0; 0	Полностью растянута.
0,04	0,15	Частично растянута.

Задача 5-3

Человек массой m=60 *кг*, закреплённый на невесомом и нерастяжимом канате, движущемся вверх с постоянной скоростью v_0=1 *м/с* поднимается на высоту L = 10 *м*. Как изменится работа, совершаемая для подъёма человека на ту же высоту, если человек будет двигаться вверх по канату с ускорением a=0,1 *м/с* ^{2} (канат поднимается с той же скоростью v_0).
Каково время подъёма человека на высоту L и на какую высоту h поднимется канат во втором случае?

Решение задачи 5-3

Рассмотрим движение в неподвижной системе отсчёта. Работа подъёма человека, когда он неподвижен по отношению к канату:
$A_1 = N_1 \cdot L$, где N_1 - сила натяжения каната в первом случае. (Рис. 5-9,а)

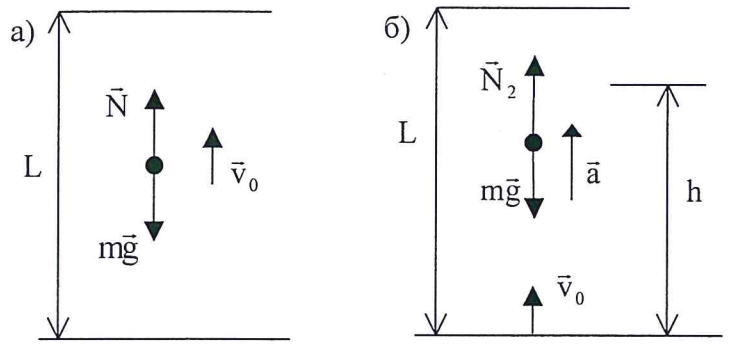


Рис. 5-9. а) Человек неподвижен по отношению к канату, движущемуся с постоянной скоростью $\vec{v}_0$.
б) Человек движется с ускорением $\vec{a}$ по отношению к канату. Канат поднимается со скоростью $\vec{v}_0$.

$A_1 = mgL$; $A_1 = 1960$ *Дж*
Во втором случае движение человека относительно неподвижной системы отсчёта выразится равенством:
$L = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2}$, где t_2 - время подъёма человека на высоту L.
Откуда время подъёма человека на высоту L во втором случае:

$$t_2 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aL}}{a} = 7{,}3\,c$$

Для сравнения время подъёма на высоту L человека и каната в первом случае:

$$t_1 = \frac{L}{v_0} = 10\,c.$$

Канат во втором случае поднимется на высоту:

$$h = v_0 t_2 = \frac{-v_0^2 + v_0\sqrt{v_0^2 + 2aL}}{a} = 7{,}3\,м$$

Решение, имеющее знак минус перед корнем, отбрасываем, т.к. $t \geq 0$.
Работа подъёма человека во втором случае:
$A_2 = N_2 h$, где N_2 - сила натяжения во втором случае. (Рис. 5-9б)
Второй закон Ньютона во втором случае:

$$m \cdot a = N_2 - mg\,;\; N_2 = m(a+g)\,;$$

$$A_2 = m(a+g)\cdot h = m(a+g)\cdot\frac{-v_0^2 + \sqrt{v_0^2 + 2aL}}{a} = 1435\,Дж$$

Таким образом работа по подъёму человека во втором случае меньше, чем в первом.

Задача 5-4

Через забор высотой h=2 *м* перекинута верёвка длиной L=1*м* так, что свешивающиеся с обеих сторон забора концы её равны и верёвка находится в равновесии (Рис. 5-10). В момент времени, принятый за начальный, равновесие нарушается и верёвка начинает соскальзывать с забора.

1) Пренебрегая трением, определить в момент, когда свешивающийся конец верёвки имеет длину $x\left(\frac{L}{2} < x < L\right)$ (Рис.5-10б), изменение потенциальной энергии верёвки; работу, которую совершит сила тяжести верёвки, а также скорость и ускорение верёвки.

2) Через какое время после того, как верёвка полностью соскользнёт с забора и начнёт падать, она целиком окажется на земле?

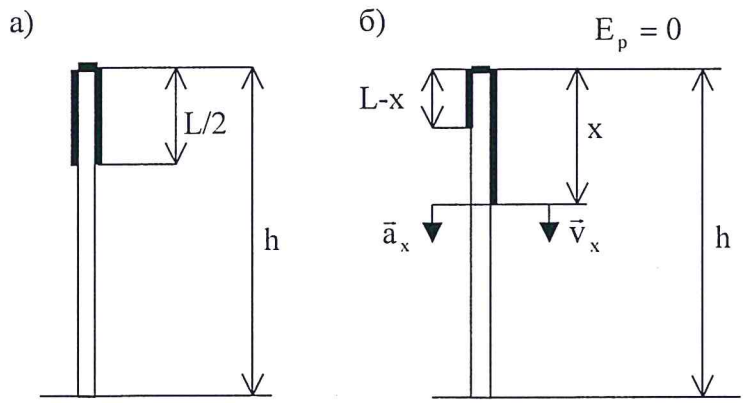


Рис. 5-10.
Верёвка длиной L:
а) в положении неустойчивого равновесия;
б) в момент, когда её скорость равна $\vec{v}(x)$ и ускорение - $\vec{a}(x)$.

Решение задачи 5-4

1) В начальный момент верёвка находится в неустойчивом положении равновесия, поскольку нарушение равновесия приводит к уменьшению потенциальной энергии. Поэтому изменение потенциальной энергии ΔE_p будет отрицательным. Найдём ΔE_p, выбрав нулевой уровень $E_p=0$ в верхней точке забора.

$$\Delta E_p = -\frac{mgx}{L}\cdot\frac{x}{2} - \frac{mg(L-x)}{L}\cdot\frac{(L-x)}{2} + mg\cdot\frac{L}{4}$$

$$\Delta E_p = -mg\left(\frac{x^2}{L} - x + \frac{L}{4}\right)$$

Работа силы тяжести верёвки найдём из соотношения, справедливого для консервативной силы:

$$\Delta E_p = -A$$

$$A = mg\left(\frac{x^2}{L} - x + \frac{L}{4}\right)$$

Скорость движения верёвки, когда длина правого конца равна x, найдём по теореме об изменении кинетической энергии:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2(x)}{2} = A = mg\left(\frac{x^2}{L} - x + \frac{L}{4}\right)$$

Откуда: $$v^2(x) = g\left(\frac{2x^2}{L} - 2x + \frac{L}{2}\right)$$

Продифференцировав по времени, из последнего выражения найдём $a(x)$:

$$2v(x)\cdot\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{4x}{L}\cdot\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\right)$$

Учтя, что $v(x) = \frac{dx}{dt} \neq 0$ и $\frac{dv}{dt} = a(x)$, получим: $a(x) = \frac{2g}{L}\cdot x - g$.

Найдём значения скорости и ускорения для двух частных значений x:

$$x = \frac{L}{2} \text{ (равновесие) } v_0 = 0; a_0 = 0;$$

$$x = L \text{ (начало свободного падения) } v = \sqrt{\frac{gL}{2}};\ a = g.$$

2) Время свободного падения верёвки от момента, когда она соскользнёт с забора, и до момента, когда она целиком приземлится, найдём из уравнения:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2}, \text{ где } v = \sqrt{\frac{gL}{2}};\ t_{1,2} = -\frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

Решение, имеющее минус перед корнем, отбрасываем, поскольку $t \geq 0$. Тогда $t = -\sqrt{\frac{L}{2g}} + \sqrt{\frac{L}{2g} + \frac{2h}{g}}$. Подставив числовые значения, получим $t = 0{,}9$ *с*.

Задача 5-5

С вершины горы (точка С) без начальной скорости съезжают сани, масса которых m. Высота горы h. Далее, двигаясь по горизонтальной плоскости, сани остановились в некоторой точке В. Уклон горы весьма мал, так что можно считать силу трения одинаковой на склоне горы и на горизонтальной плоскости (Рис. 5-11)
Определить, какую работу совершит внешняя сила, чтобы вернуть сани в исходную точку на вершине горы.

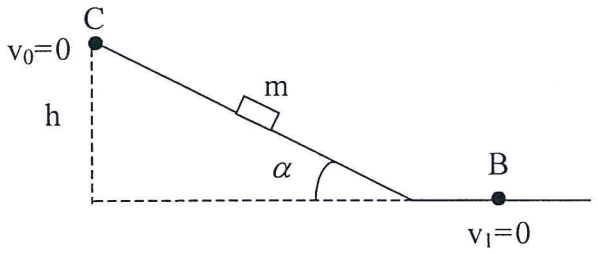


Рис. 5-11.
СВ – траектория движениясаней.
α – угол настолько мал, что $\mathrm{Cos}\alpha \approx 1$.

Решение задачи 5-5

Применим теорему об изменении кинетической энергии для перемещения саней с вершины до остановки:

$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh - A_{fr} = 0$, где mgh – работа силы тяжести; A_{fr} – работа силы трения при движении от вершины до остановки. $A_{fr} > 0$, т.к. знак минус обозначен в явном виде перед A_{fr}. Откуда: $A_{fr} = mgh$.
Когда внешняя сила перемещает сани от точки остановки до вершины горы, она совершает положительную работу против силы тяжести и против силы трения:

$$A = mgh + A_{fr} = 2mgh$$

Задача 5-6

Сани, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью $v_0 = 6$ *м/с*, выезжают на асфальт. Коэффициент трения об лёд $\mu = 0$, а об асфальт $\mu = 1$. Длина полозьев саней $L = 2$ *м*. Определить:

1) Работу, которую совершит сила трения к моменту, когда передняя кромка саней достигла координаты x, отсчитанной от границы лёд – асфальт $(0 < x \le L)$.
2) Работу, которую совершит сила трения к тому моменту, когда сани оказываются целиком на асфальте (x > L). Построить график зависимости $F_{fr}(x)$ для этого случая.
3) По данным условий задачи, найти, какой путь S пройдут сани до полной остановки.

Решение задачи 5-6

1) Рассмотрим ситуацию: сани длиной L в момент, когда передняя кромка их находится на асфальте, на расстоянии x от границы асфальта. Действие силы трения в указанный момент времени испытывает часть саней длиной x (Рис.5-12а): $F_{fr} = \mu mg \cdot \frac{x}{L}$, где $0<x<L$. Работа силы трения к указанному моменту легко определяется, поскольку $F_{fr}(x)$ – линейная функция от x:

$$A(x) = \frac{1}{2} F_{fr}(x) \cdot x$$

$A(x) = \frac{\mu mg}{2L} \cdot x^2$, $(0 < x \le L)$. При x = L (Рис.5-12,в): $A_1 = -\frac{1}{2}\mu mg \cdot L$.

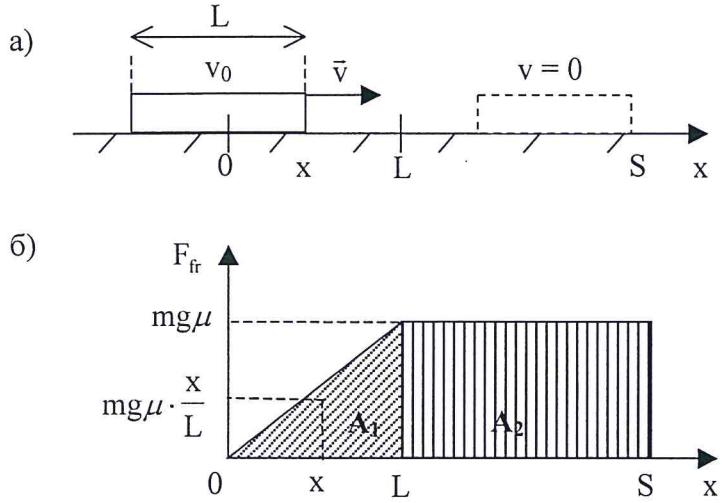


Рис. 5-12.
а) Передняя кромка саней на расстоянии x от начала асфальта O. Конечное положение саней на расстоянии S.
б)График зависимости $F_{fr}(x)$.
Работа силы трения $A = A_1 + A_2$ численно равна сумме заштрихованных площадей.

Работа, которую совершит сила трения, когда сани целиком находятся на асфальте на расстоянии x > L:

$$A(x) = -\left(\frac{1}{2}\mu mgL + \mu mg(x - L)\right)$$

Работа, которую совершит сила трения до полной остановки на расстоянии x = S:

$$A_1 + A_2 = -\left(\frac{1}{2}\mu mgL + \mu mg(S - L)\right) = -\mu mg(S - \frac{L}{2})$$

Для нахождения пути S, который пройдут сани до полной остановки, используем теорему об изменении кинетической энергии для саней:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A_1 + A_2 = -\mu mg\left(S - \frac{L}{2}\right).$$

Откуда: $S = \frac{v_0^2}{2\mu g} + \frac{L}{2}$; S = 2,84 *м*.

Задача 5-7

Вверх по наклонной плоскости равномерно со скоростью v = 1 *м/с* поднимают тело массы m = 0,1 *кг* , прикладывая силу $\vec{F}$ вверх вдоль наклонной плоскости (Рис.5-13,а). Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $\mu = 1{,}0$.

1) При каком угле наклона α_0 затрачиваемая мощность N будет максимальной и каково значение максимальной мощности?

2) Построить график зависимости затрачиваемой мощности от угла α.

Решение задачи 5-7

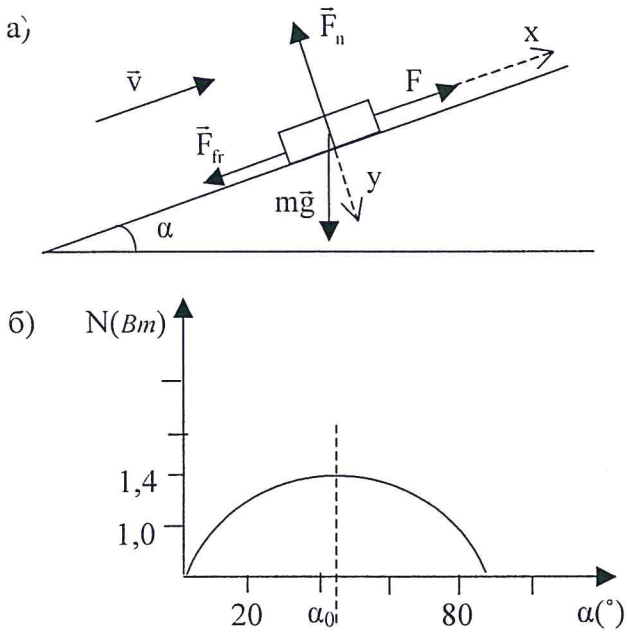


Рис. 5-13.
а) Силы, действующие на тело, движущееся со скоростью $\vec{v}$
б) График зависимости мощности, развиваемой силой F от угла α при движении с постоянной скоростью.
α_0- угол наклона, при котором мощность максимальна.

1) Поскольку тело поднимается равномерно, то $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_n = \vec{0}$, где $\vec{F}$ – приложенная сила; $\vec{F}_{fr}$ – сила трения; $\vec{F}_n$ – сила нормального давления.

В проекциях на оси условие равновесия запишется системой

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{cases} F - \mu \cdot F_n - mg\mathrm{Sin}\alpha = 0 \\ mg\mathrm{Cos}\alpha - F_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{Откуда: } F = mg\left(\mathrm{Sin}\alpha + \mu \cdot \mathrm{Cos}\alpha\right)$$

Затрачиваемая мощность, т.е. мощность, развиваемая силой $\vec{F}$ при скорости движения точки её приложения $\vec{v}$, выражается формулой:

$$N = F \cdot v \cdot \mathrm{Cos}\beta$$

где β - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$. У нас $\beta = 0$, $\mathrm{Cos}\alpha = 1$.

$$N = mg \cdot v\left(\mathrm{Sin}\alpha + \mu \cdot \mathrm{Cos}\alpha\right) \qquad (1)$$

Для нахождения угла наклона α_0, отвечающего экстремальному значению затрачиваемой мощности, приравняем нулю производную $\frac{dN}{d\alpha}$:

$$\frac{dN}{d\alpha} = mgv(\mathrm{Cos}\alpha - \mu\mathrm{Sin}\alpha) = 0$$

Т.к. $mgv \neq 0$, то: $\mathrm{Cos}\alpha - \mu\mathrm{Sin}\alpha = 0$, $\mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{1}{\mu}$

$$\alpha_0 = \mathrm{arctg}\frac{1}{\mu} \qquad (2)$$

Найдём знак $\frac{d^2N}{d\alpha^2}$ в интервале углов $0 \le \alpha \le 90^0$:

$$\frac{d^2N}{d\alpha^2} = mgv(-\mathrm{Sin}\alpha - \mu\mathrm{Cos}\alpha) = -mgv(\mathrm{Sin}\alpha + \mu\mathrm{Cos}\alpha).$$

Отрицательный знак $\frac{d^2N}{d\alpha^2}$ для интервала углов $0 \le \alpha \le 90^\circ$ свидетельствует о том, что имеет место максимум затрачиваемой мощности при $\alpha = \alpha_0$. Значение максимальной затрачиваемой мощности легко получить из выражения (1) путём подстановки $\alpha = \alpha_0$:

$$N_{max} = mgv(\mathrm{Sin}\alpha_0 + \mu\mathrm{Cos}\alpha_0)$$

Найдём численные значения искомых величин:

$$\alpha_0 = \mathrm{arctg}1 = 45^\circ$$

$$N_{max} = mgv\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{,}41\ Вт$$

2) График зависимости затрачиваемой мощности от угла наклона α показан на рисунке (5-13б). Для построения кривой было использовано выражение (1) и исходные данные задачи.

В заключение, на основании полученного соотношения (2), отметим, что α_0 растёт с уменьшением μ и наоборот. При $\mu = 0$: $\alpha_0 = 90^0$, при $\mu \to \infty$: $\alpha_0 \to 0$.

Задача 5-8

Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить на горку тело массой m = 500 *кг* из точки B в точку C, расстояние между которыми по горизонтали L = 10 *м*, а по вертикали h = 6 *м*. Коэффициент трения между телом и горкой всюду одинаков и равен $\mu = 0{,}2$.

Разобрать случаи, когда тело перемещают по траекториям: 1) BDC, 2) BC, 3) BEC (Рис.5-14а) и 4) на горку произвольного профиля (Рис.5-14б).

Решение задачи 5-8

Работа, которую необходимо совершить для перемещения тела из точки B в точку C, - это работа внешней силы против силы тяжести и силы трения. Работа против силы тяжести не зависит от формы траектории движения тела, поскольку сила тяжести –

консервативная сила. Работа против силы трения в общем случае зависит от формы траектории движения тела и должна вычисляться в каждом случае отдельно.

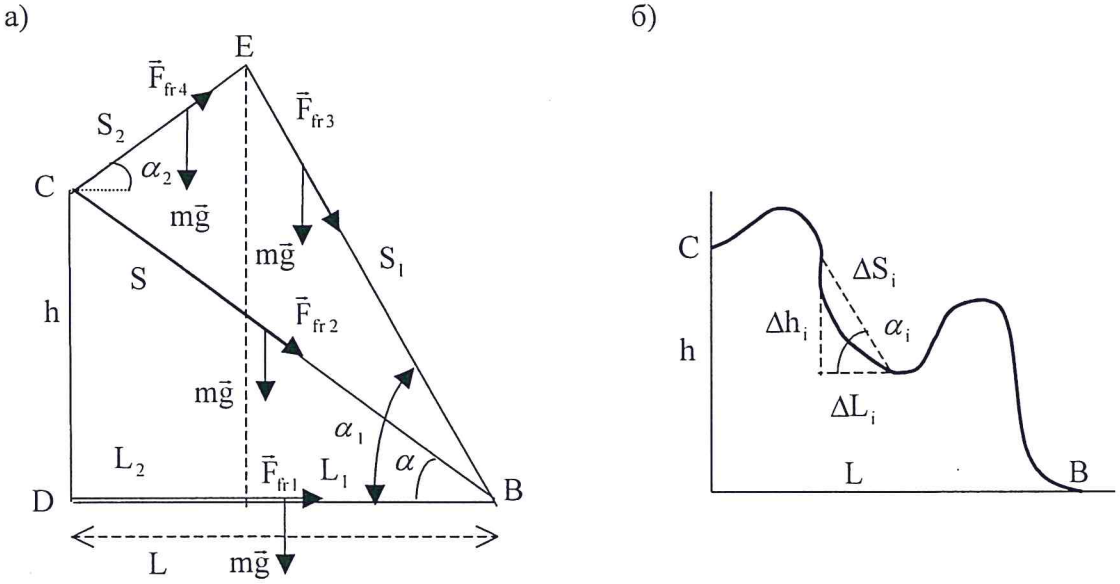


Рис. 5-14.
а) К вопросу о вычислении работы по перемещению тела массы m из точки B в точку C по траекториям BDC, BC, BEC.
б) То же, в случае перемещения тела по траектории произвольного профиля.

1) Работа на траектории BDC складывается из работы против силы трения на участке BD и работы против силы тяжести на участке DC:

$$A_1 = F_{fr1} \cdot L + mgh = mgh + \mu mgL = mg(h + \mu L)$$

2) Работа вдоль прямой BC так же складывается из работы против силы тяжести и против силы трения. Разница с предыдущим случаем состоит в том, что обе работы совершаются одновременно на всей траектории.

$$A_2 = mgh + F_{fr2} \cdot S = mgh + \mu mgCos\alpha \cdot S = mgh + \mu mgL = mg(h + \mu L),$$

где $S = \dfrac{L}{Cos\alpha}$ – длина прямой BC.

3) Работа на траектории BEC складывается из работы против силы тяжести и работы против силы трения на участках BE и EC.

$$A_3 = mgh + F_{fr3} \cdot S_1 + F_{fr4} \cdot S_2 = mgh + \mu mgCos\alpha_1 \cdot S_1 + \mu mgCos\alpha_2 \cdot S_2 =$$
$$mgh + \mu mgL_1 + \mu mgL_2 = mg(h + \mu L)$$

4) Рассмотрим движение вверх по склону горки произвольного профиля BC (Рис.5-14б). Разобьём весь путь на участки столь малой длины, что каждый участок можно считать прямолинейным, а силу трения считать неизменной по модулю и направлению. Тогда работа на i-ом участке равна:

$$\Delta A_i = \mu mgCos\alpha_i \Delta S_i + mg\Delta S_i Sin\alpha_i$$

где первое слагаемое – это работа против силы трения на участке ΔS_i, второе слагаемое – это работа против силы тяжести. Из рисунка (5-14б) видно, что

$$\Delta S_i \mathrm{Cos}\alpha_i = \Delta L_i$$
$$\Delta S_i \mathrm{Sin}\alpha_i = \Delta h_i$$

Полная работа равна сумме работ, производимых на каждом малом участке:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

где n – полное число малых участков, на которые разбит весь путь.

$$A = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu mg\Delta L_i + mg\Delta h_i\right) = \mu mgL + mgh; \;\; A = mg\left(h + \mu L\right)$$

Таким образом, во всех предложенных случаях внешняя сила, перемещающая тело от основания B до вершины C горки, совершит одну и то же работу.

$$A = mg\left(h + \mu L\right) = 40\ кДж.$$

Примечание.

Полученные результаты на первый взгляд кажутся неожиданными, противоречащими понятию о силе трения, как неконсервативной силе. Ведь её работа, казалось бы, не зависит от формы траектории движения. Разумеется, это не так. И в общем случае, и в нашей задаче, в частности, работа силы трения существенно зависит от выбора траектории. На тех траекториях, которые были даны в задаче, работа силы трения действительно оказалась одинаковой. Но существует множество траекторий, соединяющих точки B и C, работа силы трения на которых будет другой.

Для примера рассмотрим одну из таких траекторий BGBDC (Рис.5-15).

Здесь тело движется из точки B в точку C с заходом в точку G, расположенную на расстоянии L_1 от точки B. Работа, которую необходимо совершить внешней силе в этом случае, состоит из работы против силы трения на участках BG,GB,BD и работы против силы тяжести на участке DC:

$$A' = \mu mgL_1 + \mu mgL_1 + \mu mgL + mgh = mg\left(h + \mu L + 2\mu L_1\right)$$

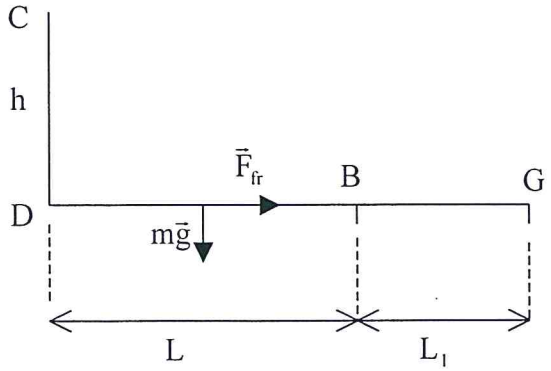


Рис. 5-15.
Движение тела из точки B в точку C по траектории BGBDC.

Полученная работа A' > A, что подтверждает факт зависимости работы силы трения от формы траектории и в данной задаче.

Задача 5-9

Автомобиль массы m = 1500 *кг* движется вверх по малому углу наклона с постоянной скоростью v_1 = 20 *м/с*. При движении того же автомобиля в обратном направлении, при той же мощности двигателя устанавливается скорость v_2 = 30 *м/с*.

1) Какая скорость v_3 установится при той же мощности мотора во время движения по горизонтальной дороге?

2) Какова величина этой мощности, если коэффициент трения $\mu = 0{,}05$?

Решение задачи 5-9

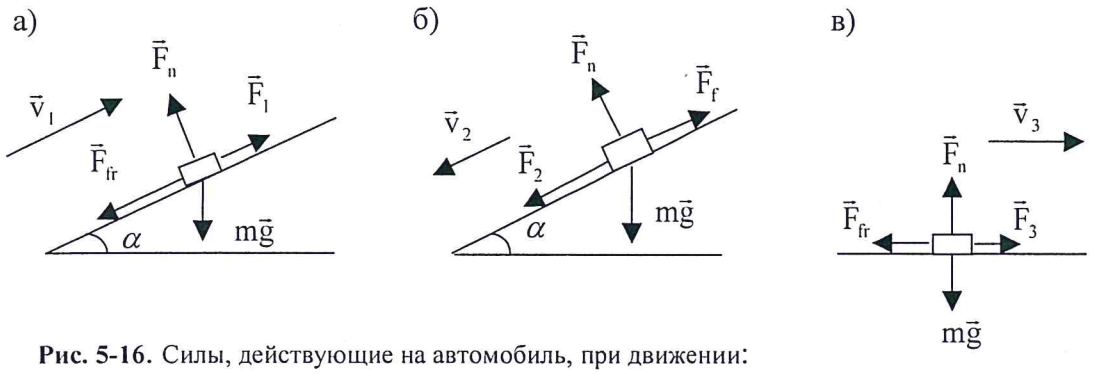


Рис. 5-16. Силы, действующие на автомобиль, при движении:
а) Вверх по уклону; в) Вниз по уклону; с) По горизонтальной дороге.

1) Поскольку мощность двигателя (N) постоянна при движении вверх и вниз по уклону, то

$$N = F_1 v_1 = F_2 v_2 \qquad (1)$$

При равномерном движении вверх сила тяги (Рис.5-16а):

$$F_1 = mg\mathrm{Sin}\alpha + \mu mg\mathrm{Cos}\alpha \qquad (2)$$

То же при равномерном движении вниз (Рис. 5-16б):

$$F_2 = -\,mg\mathrm{Sin}\alpha + \mu mg\mathrm{Cos}\alpha \qquad (3)$$

При равномерном движении по горизонтальной дороге при той же мощности двигателя (Рис.5-16в):

$$N = \mu mg v_3 \qquad (4)$$

$$F_1 + F_2 = 2\mu mg\mathrm{Cos}\alpha \qquad (5)$$

Совместное решение уравнений (3),(4),(5) позволяет найти скорость v_3:

$$N\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = 2\mu mg\mathrm{Cos}\alpha$$

$$\mu = N\left(\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}\right)\cdot\frac{1}{2mg\mathrm{Cos}\alpha};\ v_3 = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}\cdot\mathrm{Cos}\alpha$$

Т.к. уклон мал, то $\mathrm{Cos}\alpha \approx 1$. Тогда $v_3 = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 24$ *м/с*.

Мощность двигателя найдём из (4): $N = \mu mg v_3 = \dfrac{2\mu mg\cdot v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 18$ *кВт*

Задача 5-10

Самолёт для взлёта должен набрать скорость v = 25 *м/с*. Длина взлётной полосы S = 100 *м*.

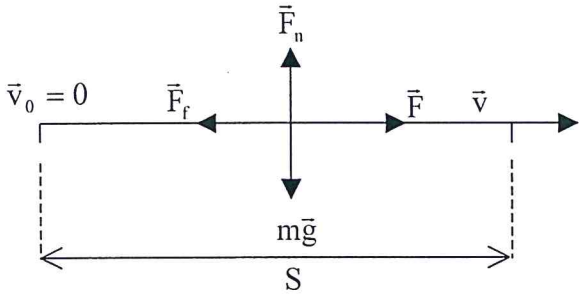


Рис. 5-17.
Силы, действующие на самолёт при разбеге .
v – скорость взлёта.
S – длина взлётной полосы.

Какова мощность моторов при взлёте, если масса самолёта m = 1000 *кг*, а коэффициент трения $\mu = 0{,}02$? Считать движение при разбеге равноускоренным.

Решение задачи 5-10

Мощность моторов в момент взлёта равна N = Fv, где F – сила тяги, которая может быть найдена с помощью теоремы об изменении кинетической энергии самолёта при его разгоне на взлётной полосе:

$$\frac{mv^2}{2} = (F - \mu mg)S, \text{ откуда: } F = m\left(\frac{v^2}{2S} + \mu g\right).$$

Мощность в момент взлёта:

$$N = F \cdot v = mv\left(\frac{v^2}{2S} + \mu g\right); \; N = 83{,}1 \, кВт.$$

6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Закон сохранения энергии является одним из фундаментальных законов природы. Он устанавливает условия энергетического баланса физических процессов. Закон сохранения энергии – универсальный и всеобъемлющий закон, который охватывает как грандиозные явления космических масштабов, так и процессы, протекающие в мире молекул, атомов и элементарных частиц. Будучи одним из наиболее общих законов природы, закон сохранения энергии не является следствием каких – либо других физических законов. Другими словами, закон сохранения энергии не может быть выведен из каких-либо более общих законов. Он получен в результате обобщения многовековой совокупности опытных фактов, характеризующих механические, тепловые, электромагнитные, ядерные, химические и другие процессы.

Закон сохранения энергии в наиболее общей форме часто называют законом сохранения и превращения энергии. Он утверждает, что энергия не возникает и не исчезает в любых процессах: она лишь превращается из одного вида в другой вид или переходит от одних тел к другим телам.

Математическая запись закона сохранения энергии в общей форме:

$$\Delta E + \Delta U = A + Q \qquad (6.1)$$

Здесь ΔE – изменение механической энергии системы, равное сумме изменений кинетической и потенциальной энергий всех тел системы. ΔU – изменение внутренней энергии тел системы. Напомним, что внутренняя энергия равна сумме кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии взаимодействия молекул друг с другом. A – работа внешних сил над системой ($A > 0$). Если система совершает работу над внешними телами, то $A < 0$. Q - количество теплоты, получаемой системой извне ($Q > 0$). Если система отдаёт тепло, то $Q < 0$. Т.о., в соотношении (6.1) работа и количество теплоты характеризуют два “канала”, по которым происходит энергообмен между системой и внешним миром.

При рассмотрении каких-либо конкретных процессов, из закона сохранения и превращения энергии, записанного уравнением (6.1), могут быть получены частные случаи этого закона. Например, в теории тепловых процессов обычно пренебрегают изменением механической энергии системы $(\Delta E = 0)$. Из (6.1) получим:

$$\Delta U = A + Q \qquad (6.2)$$

Закон сохранения в виде (6.2) называют первым началом термодинамики: изменение внутренней энергии системы производится за счёт работы или теплопередачи.

Для теплоизолированных систем ($Q = 0$) закон сохранения:

$$\Delta U = A \qquad (6.3)$$

Изменение внутренней энергии теплоизолированной системы может происходить лишь за счёт работы внешних сил.

При решении механических задач, обычно пренебрегают теплопередачей ($Q = 0$).

Из уравнения (6.1) следует:

$$\Delta E + \Delta U = A \qquad (6.4)$$

Закон сохранения энергии (6-4) написан для неконсервативных, неизолированных систем. Здесь изменение механической энергии возможно за счёт перехода её части во внутреннюю энергию тел системы, а так же за счёт работы внешних сил.

Изолированной называется система, которая не совершает работы над внешними телами и, наоборот, внешние тела не совершают работу над системой.

Для изолированной механической системы ($Q = 0$, $A = 0$) закон сохранения энергии примет вид:

$$\Delta E + \Delta U = 0 \qquad (6.5)$$

В этом случае механическая энергия может переходить во внутреннюю, но энергообмен с внешними телами отсутствует.

В консервативных системах (системах, в которых действуют лишь консервативные силы) нет перехода механической энергии во внутреннюю ($\Delta U = 0$). Закон сохранения энергии для консервативной неизолированной системы:

$$\Delta E = A \qquad (6.6)$$

В консервативной неизолированной системе изменение механической энергии возможно лишь за счёт работы внешних сил.

Если механическая система одновременно консервативная и изолированная ($\Delta U = 0$, $A = 0$), то закон сохранения энергии такой системы:

$$\Delta E = 0 \qquad (6.7)$$

Равенство (6.7) содержит закон сохранения механической энергии. Этот закон формулируется следующим образом: **в консервативной и изолированной системе полная механическая энергия сохраняется.**

Здесь требование консервативности системы исключает переход механической энергии во внутреннюю; требованием изолированности системы запрещается энергообмен с внешними телами и, следовательно, делается невозможным изменение механической энергии из-за работы внешних сил. В таблицу 6.1 сведены отдельные частные случаи закона сохранения энергии.

Таблица 6.1

Отдельные частные случаи закона сохранения энергии.

Название	Условия	Формула	Примечание
Закон сохранения и превращения энергии		$\Delta E + \Delta U = A + Q$	Общий случай
Закон сохранения для неконсервативной, неизолированной системы	$Q = 0$	$\Delta E + \Delta U = A$	Изменение E связано с работой внутренних неконсервативных и внешних сил
Закон сохранения для неконсервативной, изолированной системы	$Q = 0$; $A = 0$	$\Delta E + \Delta U = 0$	Изменение E связано с работой внутренних неконсервативных сил
Закон сохранения для консервативной, неизолированной системы	$Q = 0$ $\Delta U = 0$	$\Delta E = A$	Изменение E связано с работой внешних сил
Закон сохранения механической энергии – изолированная и консервативная система	$Q = 0$ $\Delta U = 0$ $A = 0$	$\Delta E = 0$	Изменение E отсутствует
Закон сохранения энергии в термодинамике – первое начало термодинамики	$\Delta E = 0$	$\Delta U = A + Q$	Изменение U происходит за счёт работы внешних сил и теплопередачи
Закон сохранения энергии для теплоизолированной системы	$\Delta E = 0$; $Q = 0$	$\Delta U = A$	Изменение U происходит за счёт работы внешних сил

Закон сохранения энергии является мощным орудием для решения механических задач. Причина этого состоит в том, что закон сохранения энергии справедлив всегда, независимо от хода процесса и характера действующих сил.

Во многих задачах применение закона сохранения энергии позволяет разобраться в ситуации, избегая сложных математических выкладок, характерных в случае применения законов динамики.

Прежде, чем мы перейдём к задачам и их решениям, необходимо рассказать об инерциальных системах отсчёта.

Инерциальная система отсчёта (ИСО) – это система отсчёта (СО), в которой материальная точка движется равномерно и прямолинейно или покоится, если на неё не действуют силы или действуют взаимоуравновешенные силы. Всякая СО, движущаяся равномерно и прямолинейно по отношению к ИСО, является также ИСО. Следовательно, существует бесчисленное множество равноправных ИСО.

ИСО обладают важным свойством: во всех этих системах одинаково выполняются законы механики. В этом состоит принцип относительности Галилея. СО, движущаяся с ускорением относительно ИСО, называется неинерциальной. Законы механики в неинерциальных СО не выполняются. Для решения большинства технических задач СО, жёстко связанную с Землёй, можно считать ИСО. При переходе от одной ИСО к другой, в классической механике Ньютона, для пространственных координат и времени справедливы преобразования Галилея.

Рассмотрим ИСО М и М', движущуюся относительно М с постоянной скоростью $\vec{u}$ (Рис.6-1). Преобразования Галилея для координат материальной точки и времени:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

Время в классической механике, как и расстояние между двумя точками, одинаково во всех ИСО.

Из (6.8) получим соотношения между скоростями движения материальной точки и её ускорениями в обеих ИСО путём дифференцирования по времени:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}' &= \vec{a} \end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

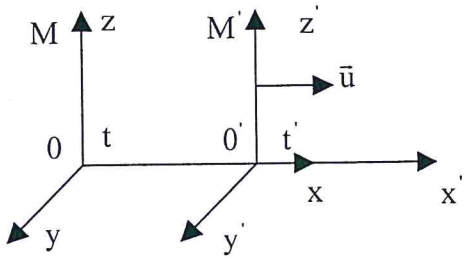


Рис. 6-1. Инерциальная система М' движется по отношению к другой инерциальной системе отсчёта М с постоянной скоростью $\vec{u}$ в направлении оси x. В начальный момент времени (t = 0) координатные оси в обеих системах совпадали.

Принцип относительности Галилея справедлив лишь при скоростях v<<c, где $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света в вакууме.

Рассмотрим, как обстоит дело с основными законами механики при переходе от одной ИСО к другой. Начнём со второго закона Ньютона. В системе М он имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (6.10)$$

где $\vec{F}$ - сумма сил, действующих на материальную точку в системе М.

В системе М' $\vec{a}' = \vec{a}_1$, согласно (6-2). Чтобы (6-10) оставался справедливым в системе М', должно быть $\vec{F}' = \vec{F}$, где $\vec{F}'$ - сумма сил, действующих в системе М'. Для консервативных сил это вызывает сомнения, поскольку указанные силы зависят от расстояний между телами или их частями. Действительно, расстояние между точками не изменяется при галилеевых преобразованиях координат. Что касается сил трения, то они зависят от относительной скорости тел, между которыми действуют силы трения. Однако, относительная скорость, т.е. разность скоростей двух тел, не изменяется, поскольку к скорости каждого тела прибавляется с обратным знаком одна и та же скорость $\vec{u}$ движения системы М' относительно системы М.

Итак, при переходе от одной системы ИСО (М) к другой (M') все силы, действующие на тело, остаются неизменными, так же как и ускорение. Второй закон Ньютона в системе М'

$$m\vec{a}' = \vec{F}' \qquad (11)$$

Это совпадает с тем же законом для системы М (6.10). Всё сказанное справедливо и для сил иной природы: кулоновских, сил Лоренца и других (здесь нами не рассматриваются).

Поскольку при переходе от системы М к системе М' силы не изменяются, то третий закон Ньютона справедлив в системе М', если он справедлив в системе М.

Перейдем к законам сохранения. Убедимся в том, что закон сохранения импульса при переходе от одной ИСО к другой удовлетворяет принципу относительности Галилея.

Пусть скорости материальных точек m_1, m_2, ... m_n, образующих замкнутую систему в системе отсчёта М, равны соответственно v_1, v_2, ... v_n, а во второй системе М' они будут равны соответственно:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{u}$$
$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{u}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{v}_n' = \vec{v}_n - \vec{u}$$

где $\vec{u}$ - скорость системы М' относительно системы М (Рис. 6-1). Полный импульс (Р) всех сил в системе отсчёта М:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n \qquad (6.12)$$

То же в системе отсчёта М':

$$\vec{P}' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + \ldots + m_n\vec{v}_n' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n - (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\vec{u} \qquad (6.13)$$

Из (6.10) и (6.13) следует, что одна и та же система материальных точек обладает разным импульсом в разных системах отсчёта. Однако $\vec{P}'$ отличается от $\vec{P}$ на константу $(m_1, m_2, \ldots m_n)\vec{u}$. Если полный импульс в системе М остаётся постоянным (система материальных точек, замкнутая в системе отсчёта М), то он остаётся постоянным и в системе отсчёта М'. Т.о., закон сохранения импульса справедлив для замкнутой системы тел в любой ИСО.

Пусть на материальную точку массы m действует импульс силы $\vec{F}\cdot\Delta t$, в результате чего её импульс изменился на величину (в системе M):

$$\Delta\vec{P} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\cdot\Delta t \qquad (6.14)$$

Уравнение (6.14) – это теорема об изменении импульса материальной точки.

$\vec{F}\Delta t$ не зависит от ИСО. Поэтому $\Delta\vec{P}$ так же не зависит от системы отсчёта. В системе отсчёта M'

$$\Delta\vec{P}' = \vec{F}'\cdot\Delta t \qquad (6.15)$$

Импульс материальной точки при переходе от одной ИСО к другой меняется, но изменение импульса остается неизменным. Во всех ИСО теорема об изменении импульса материальной точки так же удовлетворяет принципу относительности Галилея.

Закон сохранения энергии также справедлив для любой ИСО. Однако, это не столь очевидно, как закон сохранения импульса. Начнём с потенциальной энергии E_p и работы A. Мы уже знаем, что для консервативных сил изменение потенциальной энергии равно работе с обратным знаком:

$$\Delta E_p = -A \qquad (6.16)$$

Работа A не одинакова в разных ИСО, т.к. сила неизменна, а перемещение изменяется. Что касается потенциальной энергии E_p, то она одинакова в разных ИСО, т.к. является функцией расстояния между телами или их частями. Мы пришли, казалось бы, к парадоксальной ситуации, когда одна часть равенства (6.16) зависит от выбора системы отсчёта, а другая - не зависит. Вопрос решается просто. Для взаимодействующей пары тел левая часть равенства (6.16) представляет потенциальную энергию взаимодействия этих тел. Правая часть этого равенства подразумевает не работу силы, действующей на тело, а работу двух сил, приложенных к двум взаимодействующим телам. Эта работа двух сил взаимодействия, связанных третьим законом Ньютона, оказывается одинаковой во всех ИСО. Покажем справедливость этого утверждения.

Пусть два тела взаимодействуют одно с другим и в системе отсчёта, неподвижной относительно Земли, совершают перемещения $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, совпадающие по направлению с соответствующими силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Силы связаны третьим законом Ньютона:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$F_1 = F_2$$

Полная работа, равная сумме обеих сил в неподвижной системе отсчёта (Рис.6-2а):

$$A = A_1 + A_2 = F_1S_1 + F_2S_2$$

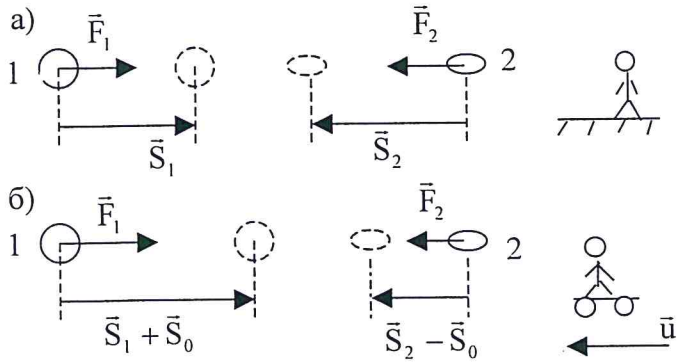


Рис. 6-2.
Два взаимодействующих тела 1 и 2:
а) в неподвижной системе отсчёта;
б) в системе отсчёта, движущейся со скоростью $\vec{u}$ относительно неподвижной системы.

При переходе в систему отсчёта, движущуюся относительно неподвижной со скоростью $\vec{u}$, оба тела получат дополнительное перемещение $\vec{S}_0$ (Рис.6-2,в). Работа в подвижной системе:

$$A' = A_1' + A_2' = F_1(S_1 + S_0) + F_2(S_2 - S_0) = (F_1S_1 + F_2S_2)(F_1S_0 - F_2S_0)$$

Поскольку $F_1 = F_2$, то $F_1S_0 - F_2S_0 = 0$. В результате: $A' = F_1S_1 + F_2S_2 = A$

Т.о., работа двух сил взаимодействия одинакова в любой ИСО.

Полученный результат справедлив как для консервативных сил, так и для сил трения. Отметим, что в любой ИСО суммарная работа сил трения взаимодействующих тел всегда отрицательна, в то время, как работа силы трения может иметь любой знак.

С кинетической энергией дело обстоит иначе. При переходе от одной системы отсчёта к другой меняется не только кинетическая энергия, но и её изменение. Рассмотрим следующий пример. На тело массы m в начальный момент начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$.

Будем рассматривать это движение в двух ИСО – M и M′, из которых M′ движется относительно M с постоянной скоростью $\vec{u}$ в направлении, противоположном $\vec{F}$.

Ускорение в системе M и M′ будет равно: $a = F/m$.

В системе M начальная скорость $v_0 = 0$, а в момент времени t скорость равна:

$$v = \frac{F}{m} \cdot t$$

В системе M′: $v_0' = u$, а в момент времени t:

$$v' = u + \frac{F}{m} \cdot t$$

Кинетическая энергия в M и M' равна соответственно:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{F^2t^2}{2m} \qquad (6.17)$$

$$E_k' = \frac{m(v')^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + F \cdot u \cdot t + \frac{F^2t^2}{2m} \qquad (6.18)$$

Поскольку в начальный момент кинетическая энергия в системах M и M' равна: $E_{k0} = 0$; $E_{k0}' = \frac{mu^2}{2}$, то изменение кинетической энергии за время t в каждой из систем отсчёта:

$$\Delta E_k = \frac{F^2t^2}{2m} \qquad (6.19)$$

$$\Delta E_k' = F \cdot u \cdot t + \frac{F^2t^2}{2m} \qquad (6.20)$$

Пути, пройденные телом в обеих системах отсчёта:

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m}$$

$$S' = ut + \frac{at^2}{2} = ut + \frac{Ft^2}{2}$$

Работы силы F на путях S и S' равны:

$$A = F \cdot S = \frac{F^2 t^2}{2m} \qquad (6.21)$$

$$A' = F \cdot S' = F \cdot u \cdot t + \frac{F^2 t^2}{2m} \qquad (6.22)$$

Теорема об изменении кинетической энергии в системах отсчёта M и M':

$$\Delta E_k = A$$

$$\Delta E'_k = A'$$

Кинетическая энергия, изменение кинетической энергии и работа в обеих системах различны, но и в той и в другой системе отсчёта работа силы равна изменению кинетической энергии материальной точки.

Полученные результаты можно перенести на систему материальных точек. Если в ней отсутствуют силы трения и другие неконсервативные силы, то полная энергия равна:

$$E = E_k + E_p$$

Поскольку E_p одна и та же во всех ИСО, то полная энергия в системе отсчёта M будет отличаться от полной энергии в M'.

Но не только полная энергия системы, но и её изменения будут различны в разных ИСО. При этом изменение полной механической энергии в M и M' будут равны работе внешних сил. Последняя также будет различной в M и M'.

$$\Delta E = A \text{ (внешних сил)}$$

$$\Delta E' = A' \text{ (внешних сил)}$$

Т.о., из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) Импульс системы материальных точек, её кинетическая энергия, полная энергия, работа внешних сил в разных ИСО различны.

2) Уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии не изменяют своего вида при переходе из одной системы в другую. При этом в каждой ИСО в эти уравнения входят значения импульса, энергии и работы, полученные в той же системе отсчёта. Это значит, что во всех ИСО действуют одни и те же законы сохранения.

Таблица 6-2.

Механические характеристики, зависящие и не зависящие от выбора инерциальной системы отсчёта.

Зависит от системы отсчёта	**Не зависит от системы отсчёта**
Координата	Расстояние между двумя точками
Траектория	Время
Перемещение	Масса материальной точки
Пройденный путь	Ускорение
Скорость	Сила, действующая на материальную точку
Импульс материальной точки	Разность скоростей (относительная скорость)
Импульс системы материальных точек	Импульс силы
Работа сил, действующих на тело	Изменение импульса материальной точки
Кинетическая энергия	Изменение импульса системы материальных точек
Изменение кинетической энергии	Потенциальная энергия
Полная механическая энергия системы	Изменение потенциальной энергии
Изменение полной механической энергии	Работа двух сил взаимодействия

Задачи к разделу 6 и их решения

Задача 6-1

Два наблюдателя рассматривают процесс соскальзывания тела по идеально гладкой ($\mu = 0$) плоскости горы с вершины, высотой h к основанию горы.
В неподвижной системе отсчёта скорость тела в верхней точке равна нулю (Рис. 6-3). Скорость движения подвижного наблюдателя $v = \sqrt{2gh}$ в направлении, указанном на рисунке 6-3б.

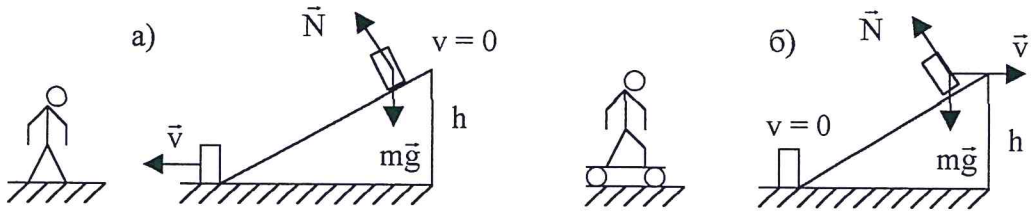


Рис. 6-3. Действующие на тело силы и скорости их движения на высоте h и у основания горы: а) в системе отсчёта, связанной с неподвижным наблюдателем;
в) в системе отсчёта, связанной с наблюдателем, движущимся со скоростью $\vec{v}$ относительно неподвижной системы.

Определить в неподвижной и подвижной системах отсчёта:
1) Изменение кинетической энергии тела.
2) Работу силы реакции опоры.
3) Вид закона сохранения.

Решение задачи 6-1

1) Рассмотрим неподвижную систему отсчёта.

Начальная кинетическая энергия $E_{k1} = 0$. У основания горы $E_{k2} = \frac{mv^2}{2}$ Изменение кинетической энергии равно работе приложенных сил. Однако, сила $\vec{N}$ не совершает работы, т.к. $\vec{N}$ перпендикулярна перемещению. Поэтому:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv^2}{2} = mgh \qquad (1)$$

Работа силы реакции плоскости: $A_N = 0$ (2)

Чтобы написать закон сохранения энергии в неподвижной системе отсчёта, выберем систему тел, состоящую из движущегося тела и Земли. Выбранная система консервативна, поскольку внутренняя сила - $m\vec{g}$ консервативна. Кроме того, система изолирована, т.к. внешняя сила $\vec{N}$ не совершает работы при движении тела. Следовательно, полная механическая энергия E сохраняется. Закон сохранения энергии в этом случае – это закон сохранения механической энергии:

$$\Delta E = 0 \qquad (3)$$

2) В системе отсчёта, связанной с подвижным наблюдателем: $E'_{k1} = \frac{mv^2}{2}; E'_{k2} = 0$

Изменение кинетической энергии:

$$\Delta E'_k = E'_{k2} - E'_{k1} = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{m \cdot 2gh}{2} = -mgh \text{, т.к. } v^2 = 2gh.$$

$$\Delta E'_k = -mgh = A' \qquad (4)$$

С другой стороны, работа сил, действующих на тело, складывается из работы силы тяжести A'_{mg} и работы силы $\vec{N}$ - A'_N в подвижной системе:

$$A' = A'_{mg} + A'_N = mgh + A'_N$$

Отсюда, с учётом равенства (4), вычислим работу силы $\vec{N}$ в подвижной системе отсчёта:

$$\Delta E'_k = -mgh + A'_N$$

$$A'_N = -2mgh \qquad (5)$$

Из полученного результата следует, что в подвижной системе отсчёта сила реакции плоскости не перпендикулярна перемещению, т.к. $A'_N \neq 0$. Это видно из (Рис.6-4), где показана траектория движения тела MQL, которую видит подвижный наблюдатель. В процессе спуска, угол между силой реакции и скоростью тела всё время остаётся тупым, т.е. $A'_N < 0$. Это согласуется с полученным значением A'_N (5).

Напишем закон сохранения энергии для подвижной системы отсчёта. Выбранная система консервативная, но не изолированная, поскольку внешняя сила реакции N совершает отрицательную работу, уменьшая полную энергию системы тел до нуля у основания горы. Закон сохранения энергии в подвижной системе будет иметь вид:

$$\Delta E = A \qquad (6)$$

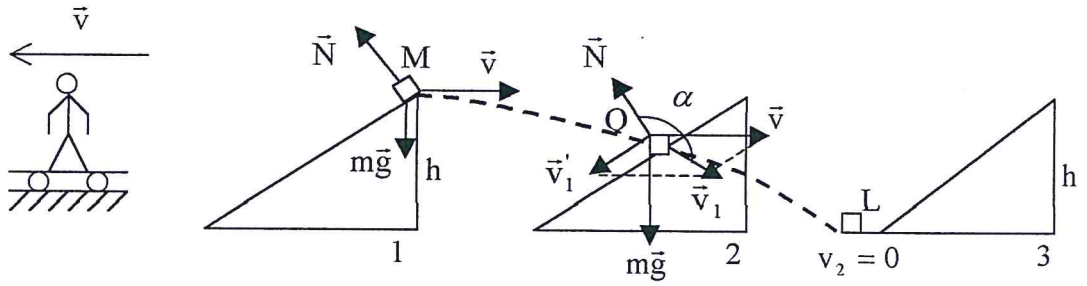


Рис. 6-4. Движение тела, видимое наблюдателем из подвижной системы отсчёта. MQL – траектория движения тела. Положение 1 отвечает моменту начала движения со скоростью $\vec{v}$. Положение 2 – промежуточное, когда скорость тела $\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}'_1$, где v'_1 - скорость относительно горы. Положение 3 соответствует моменту окончания спуска, когда скорость тела равна нулю. Во время спуска в любой момент времени угол α - тупой.

Результаты решения задачи сведены в таблицу 6-3.

Таблица 6-3

Результаты решения задачи 6-1.

Параметры	Неподвижная СО	Подвижная СО
Изменение кинетической энергии	$\Delta E_k = mgh$	$\Delta E'_k = -mgh$
Работа силы реакции плоскости	$A_N = 0$	$A'_N = -2mgh$
Формула закона сохранения энергии	$\Delta E = 0$	$\Delta E' = A'$
Характеристика системы тело-Земля	Изолированная	Неизолированная

Задача 6-2

Сани массой m соскальзывают с ледяной горы высотой h и останавливаются в точке C (Рис.6-5). Известно расстояние BC = S.

1) Найти коэффициент трения μ саней о лёд.

2) Изменится ли расстояние S, если гора, при той же высоте h, будет более пологой?

3) Будут ли двигаться сани на горе, основание которой BC = S, а высота h?

Решение задачи 6-2

1) Выберем систему тел сани–Земля. Выберем уровень нуля потенциальной энергии, совпадающим с BC. Выбранная система тел консервативная, но неизолированная, поскольку внешние силы трения совершают отрицательные работы: A_1 - на спуске горы и A_2 - на горизонтальной части траектории и тем уменьшают полную механическую энергию системы.

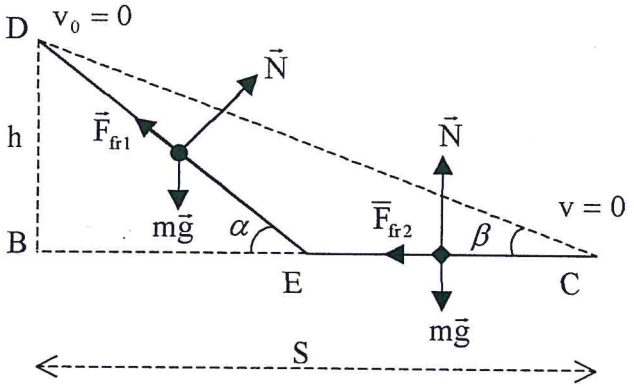


Рис. 6-5.
Сани съезжают с горы высотой h по траектории DEC.
Показаны силы, действующие на сани на склоне горы DE и на горизонтальной плоскости EC.

Закон сохранения энергии имеет вид:

$\Delta E = A_1 + A_2$, где $A_1 = -F_{fr1} \cdot \overline{DE}$; $A_2 = -F_{fr2} \cdot \overline{EC}$.

$\Delta E = -mgh$ - изменение полной механической энергии на всей траектории движения DEC.

$$-mgh = -\mu mg\mathrm{Cos}\alpha \cdot \frac{h}{\mathrm{Sin}\alpha} - \mu mg\left(S - h\mathrm{Ctg}\alpha\right)$$

$$gh = \mu g\left(h\mathrm{Ctg}\alpha + S - h\mathrm{Ctg}\alpha\right)$$

$$\mu = \frac{h}{S}$$

2) При неизменных μ и h, расстояние S не будет меняться с уменьшением наклона горы α, т.к. согласно только что полученному равенству $S = \frac{h}{\mu}$ и не зависит от α. Если в процессе уменьшения угла α его значение будет равно углу $\beta = \mathrm{arctg}\frac{h}{S}$, то движения саней вообще не будет, поскольку сила трения будет уравновешивать составляющую силы тяжести вдоль наклонной плоскости: $F_{fr1} = mgSin\beta$, откуда $\mu mgCos\beta = mgSin\beta$.

$$\mu = tg\beta = \frac{h}{S},\ \beta = \mathrm{arctg}\frac{h}{S}$$

Задача 6-3

Два шара одинаковых радиусов движутся по гладкой горизонтальной плоскости (Рис.6-6). Массы шаров m_1 и m_2, а их скорости, соответственно, $\vec{v}_1; \vec{v}_2$, направлены по линии центров шаров.

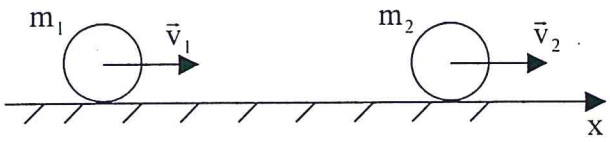


Рис. 6-6.
Два шара до их абсолютно упругого столкновения.
x- выбранная ось координат.

Определить:
1) Скорости шаров после их абсолютно упругого соударения.
2) Изменение относительной скорости шаров после их столкновения.
3) Рассмотреть случаи, когда $m_1 = m_2 = m$, когда $\frac{m_1}{m_2} \to 0(m_1 << m_2)$, и когда тела движутся навстречу друг другу, а также другие возможные случаи.

Решение задачи 6-3

Поскольку удар абсолютно упругий и трение отсутствует, то импульс и кинетическая энергия системы двух шаров сохраняются (система консервативная и замкнутая). Проведём решение в неподвижной системе.

1) Закон сохранения импульса в проекциях на ось x и закон сохранения кинетической энергии (потенциальная энергия неизменна до и после столкновения):

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \end{cases}$$

где v_1' и v_2' - проекции скоростей после удара первого и второго шаров соответственно. Перепишем систему:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' - m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое, получим:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

Составим новую систему:

$$\begin{cases} v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \\ m_1 v_1 - m_1 v_1' = m v_2' - m_2 v_2 \end{cases}$$

Откуда:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

2) Найдём относительную скорость шаров после столкновения:

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2 \text{ или: } v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1).$$

Полученный результат говорит о том, что при абсолютно упругом ударе модуль относительной скорости не изменяется $|v_2' - v_1'| = |v_2 - v_1|$. Что касается направления относительной скорости, то после удара оно изменяется на противоположное (Рис.6-7).

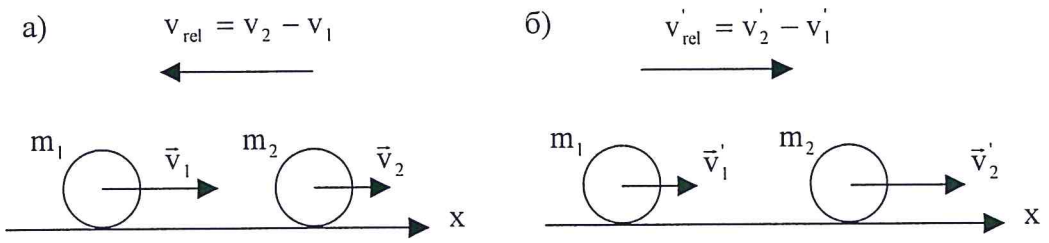


Рис. 6-7. Относительная скорость шаров, v_{rel}, v_{rel}',
а) до соударения, б) после соударения.

Проведём анализ полученных результатов.

3) $m_1 = m_2 = m$; $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$ При столкновении шаров одинаковых масс шары обмениваются скоростями и,следовательно, энергиями.

4) $m_1 = m_2 = m$ и $v_2 = 0$. Тогда $v_1' = 0$, $v_2' = v_1$. При столкновении шара с неподвижным шаром той же массы, первый шар передаёт свою энергию второму.

5) $\frac{m_1}{m_2} \to 0$: $v_1' = -v_1 + 2v_2; v_2' = v_2$. При соударении лёгкого и тяжелого шаров, тяжелый не изменяет своей скорости.

6) $\frac{m_1}{m_2} \to 0, v_2 = 0$: $v_1' = -v_1, v_2' = 0$. При ударе лёгкого шара о неподвижный тяжелый, лёгкий отталкивается без потери энергии, тяжелый остаётся неподвижным.

7) $\frac{m_1}{m_2} \to 0, v_1 = 2v_2$: $v_1' = 0, v_2' = v_2$. Если скорость лёгкого шара в 2 раза больше тяжелого, то лёгкий шар полностью теряет энергию, а тяжелый её сохраняет.

8) $m_1 = m_2 = m$, $v_2 = -v_1$: $v_1' = -v_1, v_2' = v_1$. При столкновении шаров одинаковых масс, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями, шары сохраняют свою энергию, изменив направление скорости на противоположное, т.е. разлетаются в противоположные стороны.
Приведенный анализ одновременно является средством проверки решения.

Задача 6-4

Шарик массой m, висящий на нити длиной R, отводят в сторону до горизонтального положения нити и отпускают. В тот момент, когда нить окажется под углом α к горизонту, определить:
1) Скорость $\vec{v}$, нормальное ускорение $\vec{a}_n$, тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$, полное ускорение $\vec{a}$, силу натяжения нити $\vec{N}$, равнодействующую силу, действующую на шарик.
2) Максимальную скорость v_{max}, максимальное ускорение a_{max} и максимальную силу натяжения N_{max}.
3) Как при движении шарика меняется направление полного ускорения. Силами сопротивления пренебречь.

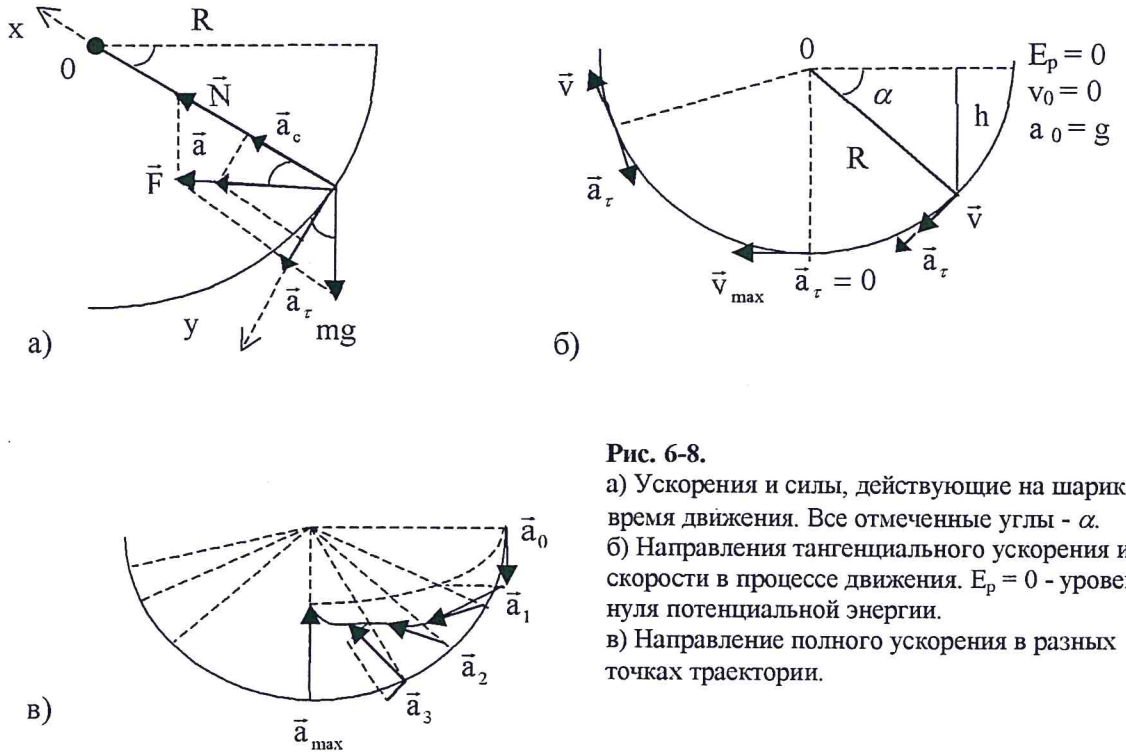


Рис. 6-8.
а) Ускорения и силы, действующие на шарик во время движения. Все отмеченные углы - α.
б) Направления тангенциального ускорения и скорости в процессе движения. $E_p = 0$ - уровень нуля потенциальной энергии.
в) Направление полного ускорения в разных точках траектории.

Решение задачи 6-4

Для нахождения скорости в момент, когда нить окажется под углом α к горизонту, напишем закон сохранения энергии для системы тел шарик–Земля. Поскольку система

консервативная и изолированная (внутренняя сила системы $m\bar{g}$ -консервативная сила и силы сопротивления отсутствуют), то

$$\Delta E = \Delta(E_k + E_p) = 0$$

Выбрав уровень $E_p = 0$ в начальной точке (Рис.6-8), имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = 0$$

Откуда: $v = \sqrt{2gh}$; $h = R\mathrm{Sin}\alpha$;

$$v = \sqrt{2gR\mathrm{Sin}\alpha} \qquad (1)$$

Максимальная скорость будет в нижней точке ($\alpha = 90^\circ$):

$$v_{max} = \sqrt{2gR} \qquad (2)$$

Из второго закона Ньютона найдём угловые зависимости нормального, тангенциального и полного ускорения (Рис.6-8).

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$$

В проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} ma_n = N - mgS\sin\alpha \\ ma_\tau = mg\mathrm{Cos}\alpha \end{cases}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\cdot 2gR\mathrm{Sin}\alpha$$

$$a_c = 2g\sin\alpha \qquad (3)$$

где a_c - центростремительное ускорение.

$$N = ma_n + mg\mathrm{Sin}\alpha = 3mg\mathrm{Sin}\alpha \qquad (4)$$

При $\alpha = 90^\circ$,

$$N_{max} = 3mg \qquad (5)$$

Из второго уравнения системы:

$$a_\tau = g\mathrm{Cos}\alpha \qquad (6)$$

Полное ускорение: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

$$a = g\sqrt{4\mathrm{Sin}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\alpha} \qquad (7)$$

Найдя производную ускорения по углу α и приравняв её нулю, определим угол α, отвечающий a_{max} в интервале $0 \le \alpha \le 90^\circ$:

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{2g(4\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Cos}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\alpha)}{2\sqrt{4\mathrm{Sin}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\alpha}} = 0$$

Поскольку корень в знаменателе не равен нулю при любом α, имеем:

$$4\mathrm{Cos}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\alpha - \mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Cos}\alpha = \frac{3}{2}\mathrm{Sin}2\alpha = 0.$$

Т.о., $\mathrm{Sin}2\alpha = 0$ при двух значениях угла $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 90^\circ$. Подставляя α_1 и α_2 в (7), видим, что:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 = 0 & a_{min} = g \\ \alpha_2 = 90^\circ & a_{max} = 2g \end{matrix}\right\} \qquad (8)$$

Остальные значения полного ускорения в интервале углов $0 \le \alpha \le 90^{\circ}$ имеют промежуточные значения.
На Рис.6-8в показано, как меняется по модулю и направлению полное ускорение $\vec{a}$. При построении были использованы выражения (3), (6) и (7).

Задача 6-5

Две пластины с массами m_1 и m_2 соединены пружиной и расположены так, что пластина m_1 находится над пластиной m_2, лежащей на горизонтальном столе (Рис. 6-9).

1) С какой силой надо надавить на верхнюю пластину, чтобы после прекращения действия силы, верхняя пластина, подпрыгнув, оторвала от стола и нижнюю?

2) Найти отношение смещений $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_0}{x_2}$, где x_0, x_1 и x_2 отмерены от уровня недеформированной пружины (x = 0). Пружина подчиняется закону Гука.

Решение задачи 6-5

1) Выберем систему тел: пластины m_1, m_2, пружина, Земля. Система консервативная, т.к. внутренние силы системы – силы тяжести и упругости – консервативны. Система так же изолированая – отсутствует энергообмен с внешними телами (сила реакции стола не совершает работы).
Совместим уровень $E_p = 0$ с уровнем, где находится верхняя точка недеформированной пружины (x = 0). Закон сохранения механической энергии $\Delta E = 0$ напишем для двух положений пластины m_1 (Рис.6-9б и 6-9в).

$$\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} + m_1 g x_2 - \left(-m_1 g x_1\right) = 0 \qquad (1)$$

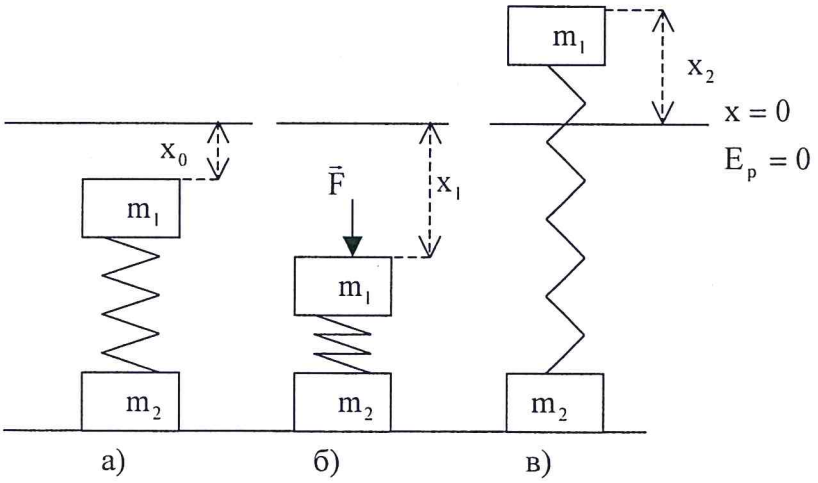


Рис. 6-9. Положения пластины массой m_1 в момент:
а) когда пружина сжата силой $m_1\vec{g}$;
б) когда пружина сжата силами $m_1\vec{g}$ и $\vec{F}$;
в) когда пружина растянута, пружина m_1 находится в крайнем верхнем положении и реакция стала равна нулю.
$E_p = 0$ уровень нуля потенциальной энергии, совмещённый с уровнем ненагруженной пружины.

Поскольку пружина подчиняется закону Гука, то:
из равновесия пластины m_1 (Рис.6-9а): $m_1g = kx_0$;
из равновесия пластины m_1 (Рис.6-9б): $m_1g + F = kx_1$;
из равновесия пластины m_2 (Рис.6-9в), с учётом равенства нулю реакции стола: $m_2g = kx_2$. Откуда:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1g}{k} \\ x_1 &= \frac{m_1g+F}{k} \\ x_2 &= \frac{m_2g}{k} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставляя x_1 и x_2 в соотношение (1), получим:

$$\frac{k}{2}\cdot\frac{m_2^2g^2}{k^2} - \frac{k}{2}\cdot\frac{(m_1g+F)^2}{k^2} + m_1g\cdot\frac{m_2g}{k} + m_1g\cdot\frac{m_1g+F}{k} = 0$$

Откуда, искомое F:

$$F^2 = g^2\left(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2\right)$$

Учитывая, что отрицательное значение F не имеет физического смысла ($\vec{F}$ сонаправлено $m_1\vec{g}$), окончательно получим:

$$F = g(m_1 + m_2) \qquad (3)$$

2) Найдём отношения смещений пластины m_1, для чего воспользуемся соотношениями (2) и (3):

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_1g+F}{m_2g} = 2\frac{m_1}{m_2} + 1 \qquad (4)$$

$$\frac{x_0}{x_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (5)$$

Если принять для частного случая $m_1 = m_2 = m$, то:

$$\frac{x_1}{x_2} = 3$$

$$\frac{x_0}{x_2} = 1$$

$$F = 2mg$$

Задача 6-6

Шайба массой m = 0,1 *кг*, двигаясь со скоростью v_0 = 5 *м/с* по идеально гладкой горизонтальной плоскости, наезжает на идеально гладкий покоящийся клин массой M=0,5 *кг*. Определить:

1) Какой максимальной высоты достигнет шайба?
2) Какую скорость $\vec{v}_1$ приобретёт клин в момент достижения шайбой максимальной высоты?
3) Какую скорость $\vec{v}_2$ будет иметь клин, когда шайба вновь соскользнёт с клина? Какова будет $\vec{v}_3$ - скорость шайбы на горизонтальной плоскости?

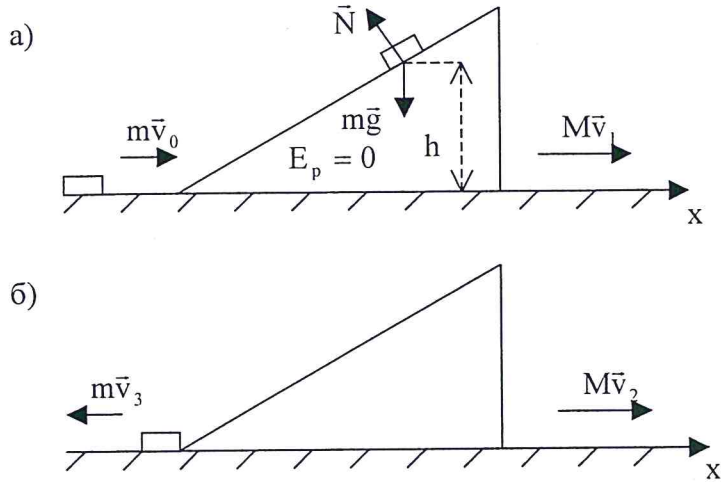


Рис. 6-10.
а) Шайба наезжает на клин и достигает высоты h.
$\vec{v}_1$ - скорость клина и шайбы в момент достижения высоты h.
б) Шайба соскользнула с клина, имея скорость $\vec{v}_3$. Клин приобрёл скорость $\vec{v}_2$.

Решение задачи 6-6

1) Рассмотрим систему шайба – клин. Система незамкнутая, поскольку при наезде шайбы на клин, возникает дополнительный импульс силы реакции горизонтальной плоскости, действующий на клин вертикально вверх.
Поэтому закон сохранения импульса системы можно написать в проекциях на горизонтальную ось x (Рис.6-10) для момента достижения шайбой максимальной высоты h. В этот момент скорость шайбы равна скорости клина $\vec{v}_1$ в неподвижной системе отсчёта.

$$mv_0 = (M+m)v_1$$

Откуда:

$$v_1 = v_0 \frac{m}{M+m} \qquad (1)$$

$$v_1 = 0{,}83 \text{ м/с}$$

2) Для определения максимальной высоты h выберем систему тел: шайба–клин–Земля. Система консервативная (нет трения внутри системы) и изолированная (нет трения о горизонтальную поверхность).
Закон сохранения механической энергии имеет вид: $\Delta E = 0$.
Распишем его. Для этого выберем нуль потенциальной энергии на уровне основания клина.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(M+m)v_1^2}{2} + mgh = \frac{(M+m)m^2v_0^2}{2(M+m)} + mgh$$

откуда:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{M}{M+m} \qquad (2)$$

$$h = 0{,}64 \text{ м}.$$

3) Для нахождения скорости клина $\vec{v}_2$ и скорости шайбы $\vec{v}_3$, когда она вновь соскользнёт с клина, напишем законы сохранения импульса и механической энергии, сравнивая состояние системы до подъёма шайбы на клин с состоянием системы после соскальзывания шайбы с клина:

$$\begin{cases} mv_0 = Mv_2 - mv_3 & (3) \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{Mv_2^2}{2} + \dfrac{mv_3^2}{2} & (4) \end{cases}$$

Для решения системы, перегруппируем уравнения:

$$\begin{cases} mv_0 + mv_3 = Mv_2 \\ mv_0^2 - mv_3^2 = Mv_2^2 \end{cases}$$

В результате деления второго уравнения на первое, получим:

$$v_0 - v_3 = v_2 \qquad (5)$$

Решая (5) совместно с (3), найдём $mv_0 + mv_3 = Mv_0 - Mv_3$. Окончательно:

$$v_3 = \frac{M-m}{M+m} \cdot v_0 \qquad (6)$$

$$v_3 = 3{,}33\ м/с$$

$$v_2 = \frac{2m}{M+m} \cdot v_0 \qquad (7)$$

$$v_2 = 1{,}66\ м/с$$

Проведём анализ полученных результатов.

1) Сравнение (1) и (7) показывает, что $v_2 = 2v_1$, т.е., в результате подъёма шайбы на высоту h клин приобрёл скорость v_1, которая удвоилась после спуска шайбы на горизонтальную плоскость.

Энергия, полученная клином при спуске шайбы, в три раза превосходит энергию, приобретённую клином в результате её подъёма.

2) Для частного случая, когда M = m, имеем: $v_3 = 0$; $v_2 = v_0$. Это значит, что при равных массах шайбы и клина, в результате их взаимодействия произошёл полный энергоообмен между шайбой и клином. Шайба целиком передала всю свою энергию клину.

3) Когда $\frac{m}{M} \to 0$, то $v_3 = v_0$, при этом v_3 направлена в сторону, обратную $\vec{v}_0$ (Рис.6-10), а $v_2 = 0$. Результатом взаимодействия лёгкой шайбы и очень тяжёлого клина является откат шайбы в обратном направлении без потери энергии. При этом клин остаётся неподвижным.

4) Разбор частных случаев в предыдущих параграфах позволяет усмотреть аналогию взаимодействия шайбы и клина с взаимодействием двух шаров при их центральном, упругом столкновении (Задача 6-3). Приняв начальную скорость второго шара равной нулю, мы получим для скоростей шаров значения, совпадающие с (6) и (7). Одинаковые результаты взаимодействия двух, казалось бы, совсем непохожих систем тел, можно объяснить одинаковой природой сил взаимодействия без потерь энергии в системах.

Задача 6-7

Ёмкость с водой стоит на рельсах, по которым она может двигаться без трения. Масса ёмкости M, масса воды m. Над поверхностью воды на верёвке висит груз массой m на расстоянии d от вертикали, проходящей через центр ёмкости O (Рис.6-11). Верёвку перерезают и груз m_1 падает в воду. В какую сторону сдвинется ёмкость, когда

движение воды в ней прекратится и груз будет плавать на поверхности? На какую величину произойдёт сдвиг ёмкости?

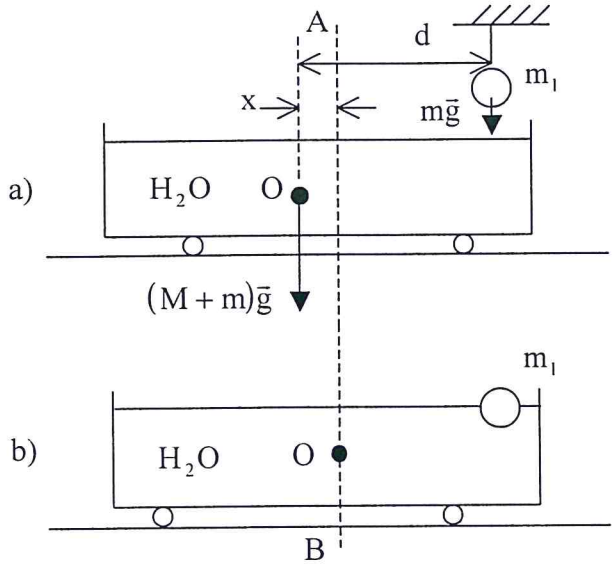


Рис. 6-11.
a) Ёмкость с водой и груз m_1, висящий на верёвке.
b) То же и груз m_1, плавающий на поверхности воды. Вертикаль AB в обоих положениях ёмкости проходит через центр масс системы.

Решение задачи 6-7

Рассмотрим систему тел: ёмкость, вода и висящий вне воды груз. Система замкнутая, поскольку все, действующие на тела системы силы, скомпенсированы. Действует закон сохранения импульса системы, который утверждает: импульс системы не изменится после того, как груз окажется плавающим на поверхности неподвижной воды.

До погружения в воду положение центра масс системы относительно центра ёмкости 0 (Рис.6-11), т.е., положение вертикали AB относительно точки 0, найдётся из соотношения: $(M + m)gx = m_1g(d - x)$. Откуда:

$$x = \frac{m_1 d}{M + m + m_1} \qquad (1)$$

Груз, плавающий на поверхности воды, вытесняет воду, вес которой равен весу груза. Вытесненная вода распределяется равномерно по всей поверхности. Центр массы системы теперь должен совпадать с центром ёмкости. Но поскольку закон сохранения импульса замкнутой системы запрещает какое-либо перемещение центра её массы за счёт внутренних сил, а внешние силы скомпенсированы, то ёмкость должна будет сдвинуться до совпадения своего центра с центром масс системы. Этот сдвиг должен произойти в направлении груза на величину x, согласно соотношению (1).

Задача 6-8

Тело массы m_1=1*кг* движется со скоростью v_1=5 *м/с*, догоняя тело массы m_2=2 *кг*, движущееся в том же направлении со скоростью v_2=3 *м/с*. После абсолютно неупругого соударения определить:

1) Скорость v_3 тел после столкновения.
2) Изменение внутренней энергии системы ΔU и долю q потерянной при ударе кинетической энергии.
3) Провести анализ полученных результатов. Трением пренебречь.

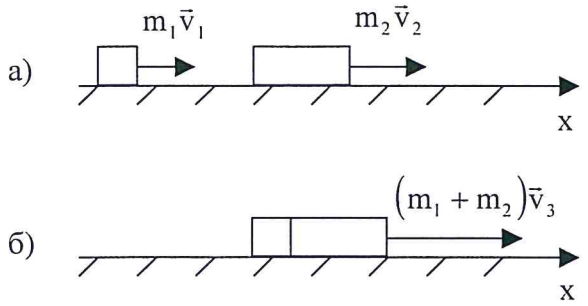


Рис. 6-12.
Два тела
а) до столкновения;
б) после неупругого столкновения.

Решение задачи 6-8

1) Рассмотрим систему двух тел m_1 и m_2 с точки зрения применения законов сохранения энергии. Система двух тел замкнутая, т.к. внешние силы, действующие со стороны Земли и плоскости на каждое из тел системы, компенсируют друг друга. Закон сохранения импульса можно написать в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_3 \qquad (1)$$

Напомним, что при неупругом соударении скорости тел одинаковы.
Выражение (1) в проекциях на ось x (Рис.6-12):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_3$$

Откуда:

$$v_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

$$v_3 = 3{,}7 \text{ м/с}$$

2) Долю q потерянной при ударе кинетической энергии найдём из закона сохранения энергии для системы двух тел. (Система не содержит третье тело – Землю, поскольку потенциальная энергия не изменяется). Выбранная система не имеет энергообмена с внешними телами и поэтому она изолированная. Однако, система неконсервативная из – за неупругого взаимодействия тел, так что, часть кинетической энергии перейдёт в тепло и тем увеличит U – внутреннюю энергию тел. Закон сохранения энергии запишется в виде:

$$\Delta E_k + \Delta U = 0 \qquad (3)$$

где ΔU - изменение внутренней энергии системы.

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot v_3^2 - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right)$$

После элементарных преобразований с учётом (2):

$$\Delta E_k = -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует:

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \qquad (5)$$

$$\Delta U = 1{,}33 \text{ Дж}$$

Соотношения (4) и (5) позволяют заключить, что в результате неупругого столкновения тел их внутренняя энергия возросла ($\Delta U > 0$) за счёт убыли кинетической энергии ($\Delta E_k < 0$).

Доля потерянной кинетической энергии:

$$q = \frac{\Delta U}{E_{k1}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} \qquad (6)$$

$$q = 0{,}062$$

3) Произведём анализ результатов, приводя их к некоторым частным случаям

Случай 1. Если $v_2 = 0$, то $q = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$; $v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$; $\Delta U = \frac{m_1 m_2 \cdot v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$.

Если второе тело к моменту удара было неподвижным, то доля потерянной кинетической энергии не зависит от скорости первого тела.

Случай 2. Если $v_2 = 0$, $\frac{m_1}{m_2} \to 0$, то $q = 1$, $v_3 = 0$, $\Delta U = \frac{m_1 v_1^2}{2} = E_{k1}$.

Если второе тело массивно и неподвижно, то после удара вся кинетическая энергия перешла во внутреннюю.

Случай 3. Если $v_2 = 0$, $m_1 = m_2 = m$, то q=1/2; $v_3 = \frac{v_1}{2}$; $\Delta U = \frac{m v_1^2}{4} = \frac{1}{2} E_{k1}$

Если второе тело до удара покоилось, то при равных массах тел половина кинетической энергии теряется, т.е. переходит во внутреннюю.

Случай 4. Если $v_1 = v_2 = v$, то $v_3 = v$; $q = 0$; $\Delta U = 0$.

Если скорости тел одинаковы по модулю и направлению, то соударения не произойдёт, потерь кинетической энергии системы не будет, внутренняя энергия останется неизменной.

Случай 5. Если $v_2 = -v_1$, $m_1 = m_2 = m$, то $v_3 = 0$; $q = 1$; $\Delta U = mv^2 = 2E_{k1}$

При равных по модулю и противоположных по направлению скоростях тел и одинаковых массах, в результате столкновения вся кинетическая энергия системы перешла во внутреннюю. Внутренняя энергия возросла на величину кинетической энергии обоих тел.

7. ИМПУЛЬС СИЛЫ, ИМПУЛЬС ТЕЛА (МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ), ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ ТЕЛ

Мы говорили о том, что законы Ньютона, выраженные в силах и ускорениях, позволяют решить любую механическую задачу, детально разобрать любое движение во всех подробностях. Однако, имеются причины, заставляющие искать другие формы выражения законов Ньютона. Речь идёт о тех случаях, которые требуют знания лишь конечного состояния движения по известному начальному состоянию, т.е. необходимо уметь сразу получить конечный результат действия силы. В этих случаях нет необходимости производить расчёт всех особенностей движения сил в процессе их взаимодействия, тем более, что часто это оказывается математически сложно. Кроме того, есть такие случаи, когда вообще понятием ускорения пользоваться нельзя. Понятие ускорения требует рассмотрения бесконечно-малых приращений скорости, т.е. предполагает, что скорость может изменяться непрерывно. В классической механике это действительно так. Оказывается однако, что при движении электронов, например, внутри атома, они могут пребывать только в некоторых дискретных состояниях движения (разрешенные состояния). Переход электрона из одного разрешенного состояния в другое осуществляется скачком, без пребывания в промежуточных состояниях. В этом и подобных случаях нельзя говорить об ускорении. Таким образом, эти и подобные причины заставили найти такие выражения законов динамики, в которых действие силы связывается непосредственно с начальными и конечными состояниями тел.

Попробуем найти такую форму второго закона Ньютона, которая содержала бы начальную и конечную скорости тела и время действия силы, вызвавшей изменение скорости. Пусть на тело массы m действует постоянная сила $\vec{F}$. Запишем второй закон в виде:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \qquad (7.1)$$

При постоянной силе движение будет равнопеременным и ускорение $\vec{a}$ может быть выражено непосредственно через начальную $\vec{v}_1$ и конечную $\vec{v}_2$ скорости

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \qquad (7.2)$$

где Δt - время действия силы $\vec{F}$.

Подставив (7.2) в (7.1), получим:

$$m \cdot \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \vec{F}$$

или

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t \qquad (7.3)$$

Произведение силы на время её действия получило название **импульса силы** $\vec{F} \cdot \Delta t$. Он совпадает по направлению с вектором силы $\vec{F}$.

Произведение массы тела на его скорость называется **импульсом тела** $m\vec{v}$ и совпадает по направлению с вектором скорости $\vec{v}$. Второй закон Ньютона в новых понятиях читается так: **изменение импульса тела (материальной точки) равно импульсу всех сил, действующих на него.**

В решении практических задач часто приходится рассматривать совместное движение нескольких взаимодействующих тел. Группы тел, движение которых рассматриваются совместно и одновременно, в механике называются системами тел.

Силы, создаваемые телами, принадлежащими к данной системе тел, называются внутренними силами системы. Силы, создаваемые внешними по отношению к данной системе телами, называются внешними силами системы.

Если на систему тел не действуют внешние силы, то такая система называется замкнутой.

Найдём такую форму третьего закона Ньютона, в которой он выражался бы через импульс силы и импульс тела. Для этого рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух гел с массами m_1, m_2. Пусть в некоторый момент времени тела имеют скорости $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ соответственно и в течение времени Δt действуют друг на друга с силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, связанными третьим законом Ньютона:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (7.4)$$

Изменение импульса каждого из тел:

$$\begin{cases} m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{v}_1 = \vec{F}_1\Delta t \\ m_2\vec{u}_2 - m_2\vec{v}_2 = \vec{F}_2\Delta t \end{cases} \qquad (7.5)$$

где $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ - скорости, которые приобретут тела после взаимодействия. $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ действуют в течение одинакового промежутка времени Δt. Следовательно, на основании (7.4):

$$\vec{F}_1 \cdot \Delta t = -\vec{F}_2 \cdot \Delta t$$

Откуда, с учетом (7.5) , получим:

$$m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{v}_1 = -\left(m_2\vec{u}_2 - m_2\vec{v}_2\right)$$

После перегруппировки членов:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

или

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{cons}\vec{\text{t}} \qquad (7.6)$$

Перейдём к общему случаю с произвольным числом тел в системе. Все тела системы будут попарно взаимодействовать силами, связанными третьим законом Ньютона. Повторяя те же рассуждения для случая многих тел, получим в результате:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \text{cons}\vec{\text{t}} \qquad (7.7)$$

Последнее равенство носит название закона сохранения импульса системы, поскольку векторная сумма импульсов всех тел системы $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$ называется **импульсом системы**. Закон сформулирован так: **импульс замкнутой системы тел остаётся постоянным в течение всего времени движения системы.**

Закон сохранения импульса системы может быть применён к некоторым системам, тела которых испытывают действие внешних импульсов сил. Если векторная сумма всех внешних импульсов сил равна нулю, то импульс системы сохраняется, а система считается замкнутой.

При решении задач встречаются случаи, когда в незамкнутой системе находится такое направление x, для которого проекция суммы внешних импульсов сил равна нулю в

течение всего времени движения системы. Система в этом случае называется замкнутой по направлению x. Закон сохранения импульса системы в этом случае выполняется в проекциях на эту ось. Распространёнными в практике являются случаи, когда для незамкнутой системы можно написать закон сохранения импульса системы на какой-либо один момент времени: момент удара, момент выстрела и т.д.

Таким образом вы познакомились с одним из важнейших законов природы – законом сохранения импульса системы. Этот закон имеет очень широкую область применения, далеко выходящую за границы механики: импульс замкнутой системы остаётся постоянным не только при механических взаимодействиях, но и при любых других процессах, могущих происходить в системе – взрыв, химическая реакция, ядерное превращение и др. Это свойство сохранения импульса при любых внутренних процессах в замкнутой системе позволяет провести анализ движения тел системы даже в тех случаях, когда силы взаимодействия вообще неизвестны.

Задачи к разделу 7 и их решения

Задача 7-1

Две лодки одинаковой массы M=1000 *кг* каждая идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v_0 = 2$ *м/с*. Когда лодки встречаются, с одной на другую перебрасывают груз m = 10 *kg*, а затем со второй лодки на первую перебрасывают такой же груз. В следующий раз грузы перебрасывают из лодки в лодку одновременно.

В каком случае после перебрасывания грузов скорость лодок будет больше?

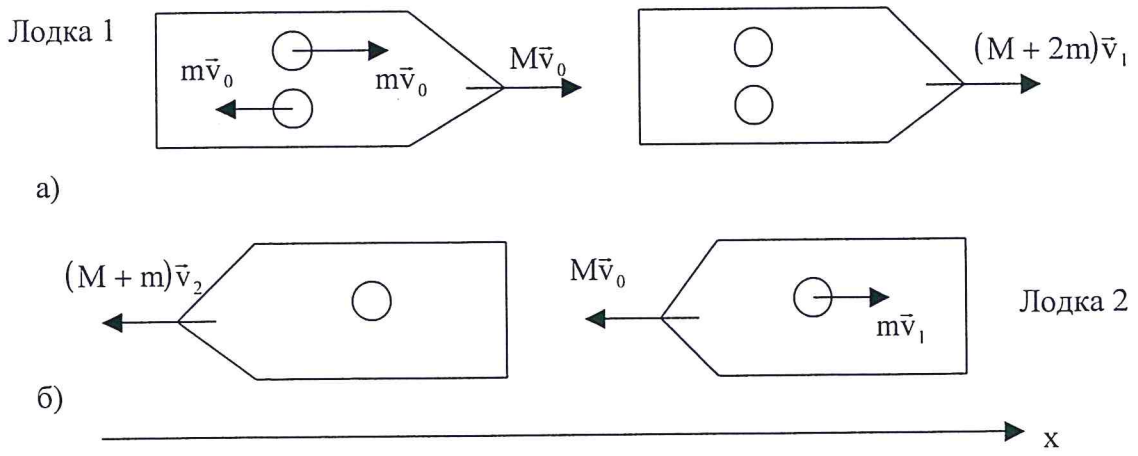


Рис. 7-1. a) Движение лодки 1 после переброски на неё груза m с лодки 2.
b) Движение лодки 2 после ответной переброски на неё груза m с лодки 1.

Решение задачи 7-1

1) Рассмотрим первый случай, когда груз переброшен из лодки 2 в лодку 1 (Рис. 7-1а) и лишь после этого такой же груз переброшен обратно из лодки 1 в лодку 2 (Рис.7-1б). Рассмотрим вначале систему тел: лодка 1 и два груза. Эта система является замкнутой вдоль направления оси x, поскольку при переброске груза на лодку действует импульс силы в направлении, перпендикулярном $\vec{v}_0$. Применяя закон сохранения импульса в проекциях на ось x, имеем:

$$(M+m)v_0 - mv_0 = (M+2m)v_1 \qquad (1)$$

Закон сохранения импульса системы: лодка 2 плюс тело в проекциях на ту же ось:

$$-Mv_0 + mv_1 = -(M+m)v_2 \qquad (2)$$

где v_1 и v_2 - конечные скорости лодки 1 и лодки 2.
Решая систему (1) и (2), имеем:

$$v_1 = v_2 = \frac{Mv_0}{M+m} \qquad (3)$$

$v_1 = v_2 = 1{,}67$ *м/с*

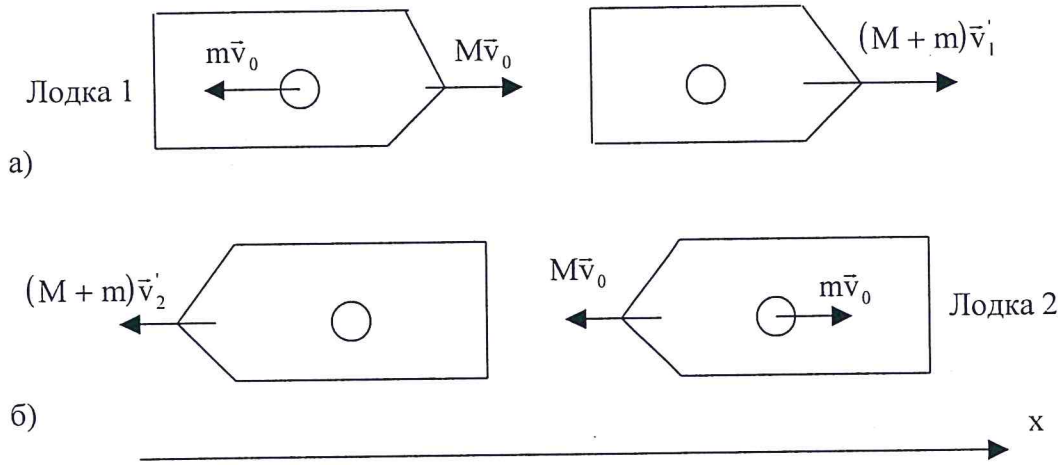


Рис 7-2. После одновременной переброски грузов из одной лодки в другую.
a) Движение лодки 1.
b) Движение лодки 2.

2) Рассмотрим второй случай, когда одинаковый груз переброшен одновременно из одной лодки в другую и наоборот (Рис.7-2).
Будем рассматривать лодку 1 плюс тело в качестве одной системы; лодку 2 плюс тело в качестве второй системы. Каждая система является замкнутой вдоль направления x. Закон сохранения для каждой системы в проекциях на ось x:

$$Mv_0 - mv_0 = (M+m)v_1' \qquad (4)$$

$$-Mv_0 + mv_0 = -(M+m)v_2' \qquad (5)$$

где v'_1 и v'_2 - конечные скорости лодок во втором случае. Из (4) и (5):

$$v_1' = v_2' = \frac{(M - m)v_0}{M + m} \qquad (6)$$

$v'_1 = v'_2 = 1{,}64$ *м/с*

Т.о. скорость лодок в первом случае получается больше.

Рассмотрим частные случаи:

1) Перебрасывается очень лёгкое тело: $\frac{m}{M} \to 0$. Лодка не должна почувствовать этого переброса:

$$v_1 = v_2 = v'_1 = v'_2 = 0$$

2) Перебрасывается тело, масса которого равна массе лодки, m = M. Лодки во втором случае остановятся, а в первом случае будут продолжать движение со скоростями:

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{3}v_0 \qquad v_1' = v_2' = 0$$

Задача 7-2

Человек массой m = 70 *кг* находится на корме лодки, покоящейся на поверхности озера. Длина лодки L = 5 *м* и длина её M = 280 *кг*. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние человек и лодка передвинутся относительно неподвижной воды? Сопротивлением воды пренебречь.

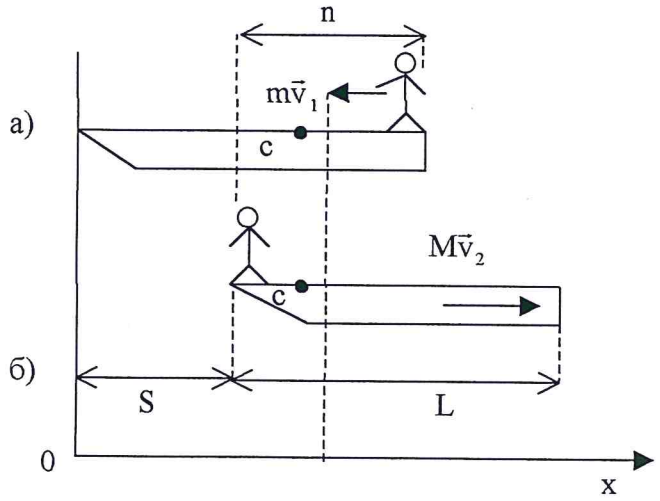


Рис. 7-3.
а) Положение человека и лодки в момент, когда человек на корме.
б) Положение человека и лодки в момент, когда человек достиг носа лодки.
с – центр масс системы лодка–человек.
v_1 и v_2 - скорости человека и лодки относительно неподвижной воды.

Решение задачи 7-2

Выберем систему тел: лодка и человек. Система замкнутая, поскольку отсутствует сопротивление воды. Закон сохранения импульса системы можно записать в векторной форме:

$$\vec{0} = M\vec{v}_2 + m\vec{v}_1 \qquad (1)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - скорости движения человека и лодки относительно неподвижной воды.

Движение человека и лодки происходит за счёт внутренних сил системы. Т.к. внешние силы скомпенсированы (вертикальные), а горизонтальные отсутствуют, то импульс системы не может изменяться. Следовательно, центр масс системы “с”, будучи в

начальный момент неподвижным, останется неподвижным во время движения человека и лодки (Рис. 7-3а, б). Выражение (1) в проекциях на ось x:

$$0 = Mv_2 - mv_1 \qquad (2)$$

Если за время Δt лодка сместилась на расстояние S, а центр массы системы "c" остался на месте, то за то же время Δt человек сместится на расстояние n относительно неподвижной воды, причём n = L – S. Следовательно:

$$\left.\begin{aligned} n &= v_1 \cdot \Delta t \\ S &= v_2 \cdot \Delta t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Подставляя в (2) значения v_1 и v_2 из (3) и сокращая обе части равенства на Δt $(\Delta t \neq 0)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= M \cdot S - mn \\ n &= L - S \end{aligned}\right\}$$

Откуда получаем:

$$S = \frac{m}{M+m} \cdot L \qquad (4)$$

S = 1 *м*

$$n = \frac{M}{M+m} \cdot L \qquad (5)$$

n = 4 *м*

Для проверки рассмотрим два частных случая.

А) $\frac{m}{M} \to 0$ - человек перемещается вдоль массивного судна, которое практически не будет реагировать на движение человека. Действительно, имеем для этого случая: S = 0; n = L, где L – длина судна.

В) $\frac{M}{m} \to 0$ - человек перемещается вдоль чрезвычайно лёгкой лодки. В этом случае лодка должна переместиться на всю свою длину, а человек останется неподвижным относительно воды. Действительно, имеем: S = L; n = 0.

Задача 7-3

Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на нити, и застревает в нём.

1) Определить угол α, на который отклонится шар, если масса пули m = 20 *г*, масса шара M = 5 *кг*, длина нити L = 4 *м*.

2) Определить минимальную скорость пули, при которой шар мог бы вращаться по кругу в вертикальной плоскости.

Задачу решить для двух случаев: (а) – шар подвешен на нерастяжимой нити, (б) – шар подвешен на невесомой недеформируемой штанге.

Решение задачи 7-3

1) Выберем систему тел: шар и пуля. Система незамкнутая, т.к. на шар действует внешний импульс со стороны нити (или штанги), $\vec{N}t$, и со стороны Земли, $M\vec{g}t$ (Рис.7-4). Поскольку суммарный импульс силы изменяется во времени и по модулю и

по направлению, то не существует такого направления, для которого возможно было бы написать закон сохранения импульса в проекциях на это направление на всё время движения тел системы. Однако здесь можно написать закон сохранения импульса системы на один момент времени – на момент соударения пули с шаром. Учитывая, что удар абсолютно неупругий, закон сохранения импульса:

$$mv_1 = (M + m)v_0 \qquad (1)$$

где v_1 - скорость пули, v_0 - скорость шара и пули в момент после удара, когда шар находится в крайнем нижнем положении. Откуда

$$v_0 = v_1 \frac{m}{M + m}$$

Рассмотрим новую систему тел: шар с застрявшей пулей и Земля. Эта система консервативная и изолированная. Консервативность обусловлена отсутствием сил сопротивления. Внешняя сила $\vec{N}$ оставляет систему изолированной, т.к. при движении шара она не совершает работу и, следовательно, не создаёт энергообмена между системой и внешним миром. Закон сохранения механической энергии для выбранной системы тел:

$$\Delta E = \Delta(E_k + E_p) = 0$$

Выбрав $E_p = 0$ на уровне нижней точки круга, имеем:

$$-\frac{(M + m)v_0^2}{2} + (M + m)g(L - L\mathrm{Cos}\alpha) = 0 \qquad (2)$$

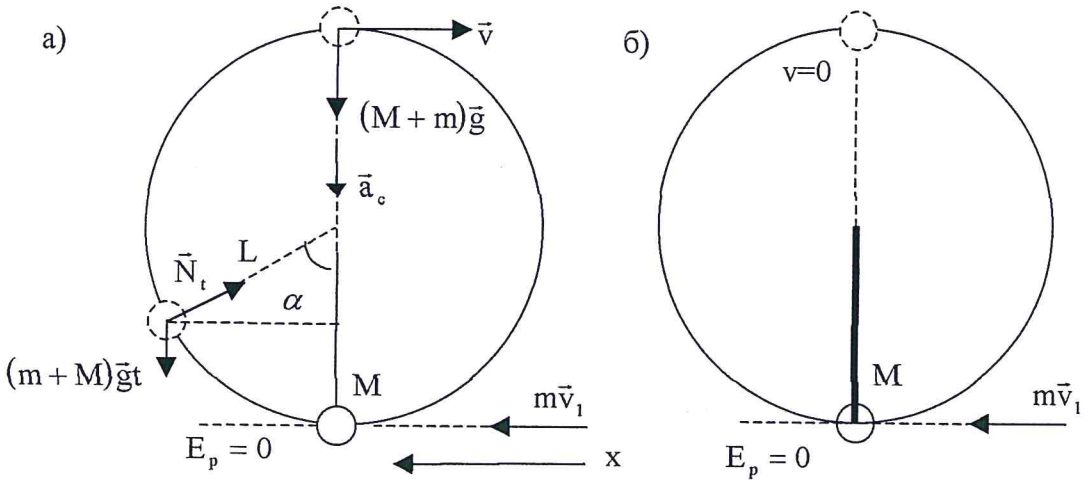


Рис. 7-4. Шар с застрявшей пулей вращается в вертикальной плоскости.
a) Шар на нити. b) Шар на штанге.

Решая (2) относительно α с учётом (1):

$$1 - \mathrm{Cos}\alpha = 2\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{v_1^{\,2}m^2}{2gL(M + m)^2}$$

$$\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2} = \frac{v_1 m}{M + m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4gL}} \qquad (3)$$

$\alpha = 15^\circ$

2) Найдём минимальную скорость пули v'_1, при которой шар, подвешенный на нерастяжимой нити, будет вращаться в вертикальной плоскости. Напишем закон сохранения механической энергии для системы пуля–шар, Земля (Рис.7-4,а)

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - \frac{(M+m)v_0'^2}{2} + mg \cdot 2L = 0 \qquad (4)$$

где $v_0' = v_1' \cdot \frac{m}{M+m}$

Здесь v – скорость шара в верхней точке траектории; v найдём из второго закона Ньютона для шара с пулей для верхней точки траектории:

$$(M+m) \cdot \vec{a}_c = (M+m) \cdot \vec{g} + \vec{N},$$

где $\vec{a}_c$ - центростремительное ускорение, $\vec{N}$ - реакция нити в верхней точке круга.

$$(M+m) \cdot \frac{v^2}{L} = (M+m)g + N \qquad (5)$$

Если положить N = 0 в (5), то v примет минимальное значение, при котором шар пройдёт через верхнюю точку круга:

$$(M+m)\frac{v^2}{L} = (M+m)g$$

$$v^2 = gL \qquad (6)$$

Подставляя v и v_0' в (4), получим искомую минимальную скорость пули для рассматриваемого случая шара на нити:

$$v_1' = \frac{M+m}{m} \cdot \sqrt{5gL} \qquad (7)$$

Найдём минимальную скорость пули v_1'', при которой шар с пулей, подвешенный на невесомой штанге, будет вращаться в вертикальной плоскости. Этот случай отличается от предыдущего тем, что при наличии штанги скорость шара в верхней точке траектории v равен нулю при минимальной скорости пули.

Закон сохранения механической энергии той же системы тел, для нижнего и верхнего уровней, будет:

$$-\frac{(M+m)v_0''^2}{2} + (M+m) \cdot 2gL = 0 \qquad (8)$$

где скорость в нижней точке после удара:

$$v_0'' = v_1'' \cdot \frac{m}{M+m}$$

Откуда минимальная скорость пули v_1'' в случае, когда шар подвешен на штанге:

$$v_1'' = \frac{M+m}{m} \cdot \sqrt{4gL} \qquad (9)$$

Т.о., минимальная скорость пули v_1'', необходимая для того, чтобы заставить шар на штанге вращаться в вертикальной плоскости, меньше минимальной скорости пули v_1', для случая, когда шар подвешен на нити.

Задача 7-4

На рельсах находится платформа с закреплённым на ней орудием. Масса платформы и орудия M=15000 *кг*. Из орудия производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда m=100 *кг*, его начальная скорость относительно орудия $v_0 = 500$ *м/с*. На какое расстояние S откатится платформа после выстрела, если:

1) Платформа двигалась со скоростью v = 5 *м/с* и выстрел был произведён в направлении её движения;

2) Платформа двигалась со скоростью v = 5 *м/с* и выстрел был произведён в направлении, противоположном направлению её движения;

3) Платформа вначале стояла неподвижно.

Коэффициент трения платформы о рельсы $\mu = 0{,}002$

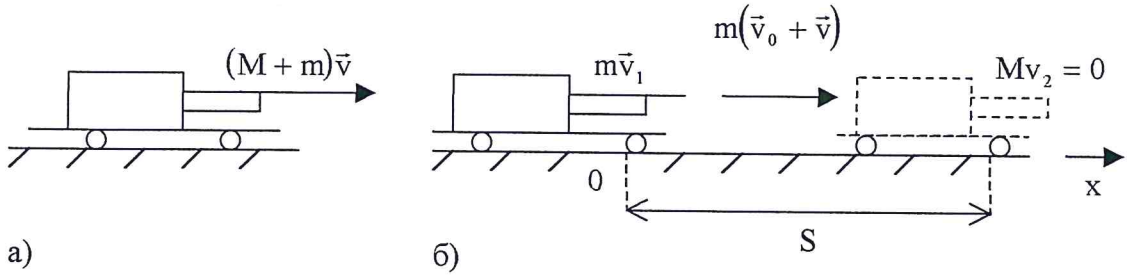


Рис. 7-5. Движение платформы с орудием: a) до выстрела, b) после выстрела до остановки на расстоянии S от точки 0, в которой был произведён выстрел.

Решение задачи 7-4

1) Выберем систему тел: платформа с орудием и снаряд. Система незамкнутая, т.к. внешний импульс силы трения уменьшает импульс системы. Напишем закон сохранения импульса системы на момент выстрела:

$$(M+m)v = Mv_1 + m(v_0 + v) \qquad (1)$$

где: v – скорость платформы и орудия до выстрела;

v_1 - то же сразу после выстрела;

$v_0 + v$ - скорость снаряда относительно Земли.

Из (1):

$$v_1 = \frac{M+m}{M}\cdot v - \frac{m}{M}(v + v_0)$$

$$v_1 = v - \frac{m}{M}v_0 \qquad (2)$$

Найдём расстояние, на которое откатится платформа. Для этого напишем теорему об изменении кинетической энергии применительно к платформе от момента выстрела до полной остановки:

$$\Delta E_k = A_{fr};$$

$$-\frac{Mv_1^2}{2} = -\mu Mg\cdot S \qquad (3)$$

С учётом (2):

$$S_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{1}{2\mu g}\left(v - \frac{m}{M}v_0\right)^2 \qquad (4)$$

S_1=71 *м*

2) Если выстрел был произведён в направлении, противоположном движению платформы, то

$$S_2 = \frac{1}{2\mu g}\left(v + \frac{m}{M}v_0\right)^2 \qquad (5)$$

$S_2 = 1770$ *м*

3) Если выстрел был произведён с покоящейся платформы, то:

$$S_3 = \frac{1}{2\mu g}\cdot\frac{m^2}{M^2}v_0^2 \qquad (6)$$

$S_3 = 283$ *м*

Задача 7-5

Шарик соскальзывает без трения с верхней точки неподвижной полусферы радиуса R.

1) Найти, какую наименьшую скорость v_0 нужно сообщить шарику в горизонтальном направлении в верхней точке полусферы, чтобы он оторвался от полусферы в верхней её точке?

2) Если начальная скорость v_0 равна нулю, то на какой высоте от основания полусферы, H_1, произойдёт отрыв шарика от полусферы?

3) Определить в момент отрыва нормальное ускорение a_n, тангенциальное ускорение a_τ и полное ускорение a.

4) На какую высоту H подскочит шарик после абсолютно упругого удара о плоскость, на которой покоится полусфера? Размеры шарика считать малыми по сравнению с R.

Решение задачи 7-5

1) Найдём наименьшую скорость, v_0, при которой шарик не двигается по сфере, а в начальной точке отрывается от неё. Для этого напишем второй закон Ньютона для начальной точки:

$$m\vec{a}_{n0} = m\vec{g} + \vec{N}_0 \qquad (1)$$

где $a_{n0} = \frac{v_0^2}{R}$ - нормальное ускорение в начальной точке, $\vec{N}_0$ - нормальная реакция полусферы в начальной точке. При отрыве $\vec{N}_0 = \vec{0}$. Из (1):

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg$$

$$v_0 = \sqrt{gR}$$

2) Определим, на какой высоте H_1 шарик оторвётся от поверхности полусферы при $v_0 = 0$ (Рис.7-6). Напишем второй закон Ньютона для точки 1, соответствующей моменту отрыва шарика от полусферы:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad (2)$$

Проектируя (2) на оси x и y , а также учитывая, что при отрыве реакция в точке 1 равно нулю, N = 0, получим:

$$ma_n = mgCos\alpha \qquad (3)$$

$$ma_\tau = mgSin\alpha \qquad (4)$$

Из (3) получим: $\frac{v^2}{R} = g \cdot \frac{H_1}{R}$

$$v^2 = gH_1 \qquad (5)$$

С другой стороны, напишем закон сохранения механической энергии для консервативной и изолированной системы шарик – Земля. Здесь $m\vec{g}$ - внутренняя сила, $\vec{N}$ - внешняя сила. Однако, при движении шарика от начальной точки до точки 1 отрыва, сила $\vec{N}$ не совершает работы, т.к. в каждый момент она перпендикулярна перемещению. Следовательно, энергообмен системы с внешним миром отсутствует, и система остаётся изолированной. Закон сохранения механической энергии для начального уровня и уровня 1 отрыва:

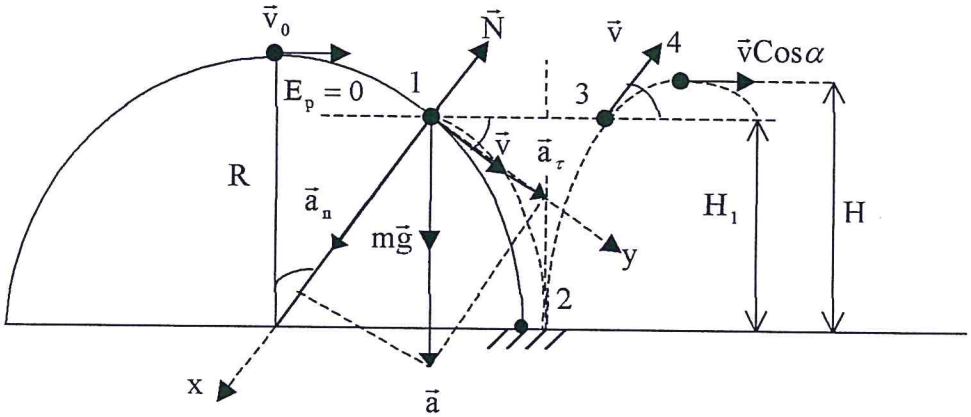


Рис.7-6. Движение шарика по неподвижной сфере с отрывом от неё в точке 1, абсолютно упругом ударе в точке 2, подъёмом в наивысшую точку 4. Все отмеченные углы - α .

$$\Delta E = \Delta(E_k + E_p) = 0 \text{; или:}$$

$$\frac{mv^2}{2} - mg(R - RCos\alpha) = 0$$

$$v^2 = 2gR - 2gR\frac{H_1}{R} \qquad (6)$$

$$v^2 = 2gR - 2gH_1$$

Решая совместно (5) и (6), получим:

$$H_1 = (2/3)R \qquad (7)$$

3) Из соотношений (3) и (4) найдём a_n и a_τ:

$$a_n = \frac{2}{3}g \qquad (8)$$

$$a_\tau = \frac{\sqrt{5}}{3} g \qquad (9)$$

Полное ускорение шарика в момент отрыва:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g \qquad (10)$$

4) Найдём, на какую высоту H подскочит шарик. Поскольку удар абсолютно упругий, то скорость шарика в точке 3 та же по модулю, что в точке 1, а направление скорости показано на рисунке 7-6. Скорость на высоте H равна $v_0 \mathrm{Cos}\alpha$. Из закона сохранения механической энергии для уровней точек 3 и 4:

$$\frac{mv^2 \mathrm{Cos}^2\alpha}{2} - \frac{mv_0^2}{2} + mg(H - H_1) = 0$$

Найдём искомую высоту: H = (23/27) R

Задача 7-6

Тело массы m без начальной скорости и без трения соскальзывает вниз по наклонному желобу, переходящему в мёртвую петлю радиуса R (Рис.7-7)

1) С какой высоты h должно начать спускаться тело, чтобы оно оторвалось от петли в точке B, определяемой углом α (α - угол, образованный радиусом, проведённым из центра петли в точку B, с вертикалью). Каковы максимальное и минимальное значения высоты начала движения тела, при которых будет происходить отрыв тела при прохождении мёртвой петли? Каков интервал возможных углов отрыва?

2) С какой силой тело давит на жёлоб в процессе движения в точках петли, соответствующих углам α_1 = 180°, α_2 = 90° и α_3 = 0, если его спустили с высоты h = (5/2)R?

Размеры тела малы по сравнению с радиусом петли.

Решение задачи 7-6

1) Второй закон Ньютона для тела m в момент прохождения точки B (Рис.7-7)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

В проекциях на ось x:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\mathrm{Cos}\alpha + N \qquad (1)$$

В момент отрыва сила реакции петли N = 0. После сокращения:

$$\frac{v^2}{R} = g\mathrm{Cos}\alpha \qquad (2)$$

Соотношение (2) имеет физический смысл при

$$\mathrm{Cos}\alpha \geq 0 \qquad (3)$$

Т.е., для интервала углов:

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ \qquad (4)$$

Следовательно, вне интервала углов (4) отрыв тела от петли невозможен.

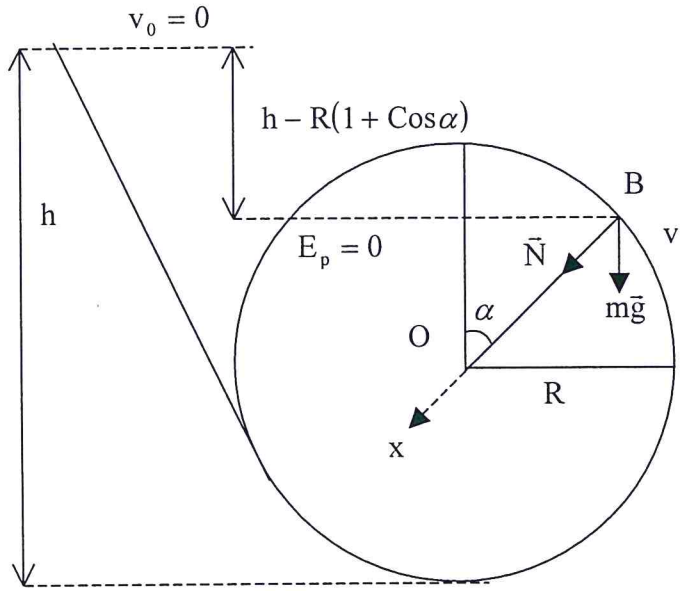


Рис. 7-7.
Движение тела по жёлобу, образующему мёртвую петлю. $E_p = 0$ - уровень отсчёта потенциальной энергии.

Найдём высоту h, с которой должно спуститься тело, чтобы оторваться от петли в точке B. Для этого напишем закон сохранения механической энергии для системы тело–Земля. Система консервативная и изолированная (внешняя сила $\vec{N}$ не совершает работу и не создаёт энергообмена с внешними телами). $E_p = 0$ - уровень нуля потенциальной энергии показан на рисунке 7-7. Сравнивая полную механическую энергию начального уровня и уровня, где $E_p = 0$, получим:

$$\frac{mv^2}{2} = mg[h - R(1 + Cos\alpha)] \qquad (5)$$

Решая совместно (2) и (5), найдём h:

$$h = \frac{R}{2}(2 + 3Cos\alpha) \qquad (6)$$

Откуда:

$$Cos\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right) \qquad (7)$$

Т.к. отрыв возможен лишь в интервале $0 \le \alpha \le 90^\circ$ (что следует из (4)), найдём, каким значениям h этот интервал соответствует. Из (6) следует:

А) для, $\alpha_1 = 0$, $h_1 = \frac{5}{2}R$, т.е. отрыв произойдёт в верхней точке петли, спускаясь с высоты $h_0 = \frac{5}{2}R$.

В) для $\alpha_2 = 90°$, $h_2 = R$. Здесь тело, достигнув точки $\alpha = 90°$ и полностью потеряв скорость, вновь вернётся в исходную точку $h_2 = R$ при отсутствии потерь.

Таким образом, интервалу возможных углов отрыва тела от петли $0 \le \alpha \le 90°$ (4) соответствует интервал высот

$$\frac{5}{2}R \ge h \ge R \qquad (8)$$

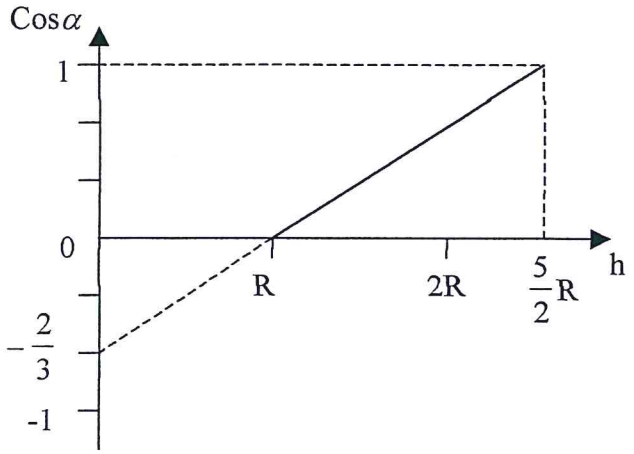


Рис. 7-8. График зависимости косинуса угла отрыва тела от петли от требуемой высоты начала его спуска (сплошная линия).

Это высоты, с которых должен начинаться спуск, чтобы произошел отрыв. Полученные результаты видны из графика, выражающего зависимость (7), где сплошная линия связывает указанные значения линейной зависимостью (Рис.7-8) и обозначает границы интервалов этих значений.

2) Представим, что тело спущено с высоты h = (5/2)R. Мы уже знаем, что тело пройдёт через все точки петли, действуя в каждой точке с определённой силой давления $\vec{N}'$, направленной по радиусу. В каждой точке петли сила давления на жёлоб, согласно третьему закону Ньютона, по модулю равна силе нормальной реакции жёлоба N и приложена к соответствующей точке жёлоба:

$$N' = N \qquad (9)$$

Из соотношения (1) с учётом (9):

$$N' = \frac{mv^2}{R} - gR\mathrm{Cos}\alpha \qquad (10)$$

Из (5):

$$v^2 = 2mg\left[h - R(1 + \mathrm{Cos}\alpha)\right] \qquad (11)$$

Решая (10) и (11), найдём силу давления в точке B:

$$N' = 3mg(1 - \mathrm{Cos}\alpha) \qquad (12)$$

Для искомых точек петли:

$$\alpha_3 = 180^\circ \qquad N'_1 = 6mg$$
$$\alpha_2 = 90^\circ \qquad N'_2 = 3mg$$
$$\alpha_1 = 0^\circ \qquad N'_3 = 0$$

Задача 7-7

Тело бросили горизонтально с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха найти:

1) зависимость от времени радиуса кривизны траектории;

2) радиус кривизны в той точке параболы, где скорость в два раза больше начальной скорости, а также радиус кривизны в момент броска, спустя 1 секунду и спустя 3 секунды после броска, считая, что v_0 = 10 *м/с*.

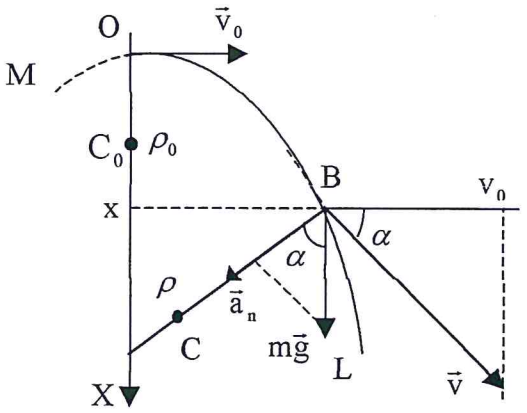


Рис. 7-9. Свободное падение тела по параболической траектории OBL при начальной скорости $\vec{v}_0$.
Пунктирной линией OM показана часть параболы, которая могла бы быть описана телом, если бы ему сообщили такую же начальную скорость, но в противоположном направлении $\left(-\vec{v}_0\right)$.
C_0 и ρ_0 - центр кривизны и радиус кривизны в начальной точке O (t_0=0).
C и ρ - центр кривизны и радиус кривизны в точке B траектории, соответствующей моменту времени t.
$\vec{a}_n$ - нормальное (центростремительное) ускорение тела в точке B.

Решение задачи 7-7

1) Произведём решение в неподвижной системе отсчёта с началом в точке бросания и осью x, направленной вертикально вниз. Началом отсчёта времени будем считать момент броска (Рис.7-9). Пусть тело, двигаясь по параболической траектории, в момент времени t пройдёт точку B. На рисунке точка C – центр кривизны траектории и $\rho = CB$ - радиус кривизны траектории в точке B. Напишем второй закон Ньютона для тела в момент прохождения точки B, в проекциях на направление радиуса кривизны:

$$\frac{mv^2}{\rho} = mgCos\alpha \qquad (1)$$

где ρ - искомый радиус кривизны в момент времени t, v - скорость тела в тот же момент времени.

Учтя, что $v = \frac{v_0}{Cos\alpha}$, получим из (1): $\rho = \frac{v_0^2}{gCos^3\alpha}$ (2)

где α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ (Рис.7-9) в момент времени t.

Чтобы найти временную зависимость радиуса кривизны, напишем теорему об изменении импульса тела от начала падения до момента прохождения точки B:

$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m\vec{g} \cdot t$

В проекциях на ось x: $v \cdot Sin\alpha = gt$; или $\frac{v_0 \cdot Sin\alpha}{Cos\alpha} = gt$.

Возведя в квадрат и сделав замену $Sin^2\alpha = 1 - Cos^2\alpha$, получим:

$$Cos\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

Окончательно:

$$\rho = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g} \qquad (3)$$

Проведём анализ выражения (3).

А) В момент времени t = 0 радиус кривизны имеет минимальную величину, равную:

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{g} \qquad (4)$$

Б) В процессе свободного падения тела радиус кривизны возрастает, как t^3 и при $t \to \infty$ радиус кривизны стремится к бесконечности, $\rho \to \infty$ (ветвь параболы стремится превратиться в вертикальную прямую).

В) Если $v_0 = 0$, то в любой момент времени t получим, что $\rho \to \infty$. Это значит, что при отсутствии начальной скорости траектория падения тела будет представлять собой прямую линию (вертикаль).

Г) При большом значении начальной скорости, v_0, радиус кривизны будет столь большим, что траектория тела будет мало отличаться от прямой линии (в этом случае – горизонтали)

2) Найдём радиус кривизны в точке параболы, где $v = 2v_0$. Для этого удобно воспользоваться выражением (2), поскольку в этом случае $\mathrm{Cos}\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{1}{2}$ (Рис.7-9)

$$\rho = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{8v_0^2}{g}$$

При $v_0 = 10$ *м/с*, получим $\rho = 81{,}6$ *м*.

Радиус кривизны параболы в момент броска:

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{g} = 10{,}2 \text{ м}$$

Радиус кривизны, спустя 3 секунды после начала падения, полученный из (3):

$$\rho = 305 \text{ м}$$

Задача 7-8

На бруске длиной L = 0,2 *м* и массой M = 0,5 *кг*, расположенном на гладкой горизонтальной поверхности, лежит маленькое тело массой m = 0,1 *кг* (Рис.7-10). Коэффициент трения между телом и бруском $\mu = 0{,}6$. С какой минимальной скоростью $\bar{v}$ должна двигаться система, чтобы после упругого удара бруска о стенку тело упало с бруска?

Решение задачи 7-8

Абсолютно упругий удар бруска о стенку приводит к тому, что его скорость скачком изменится на противоположную, сохранив свой модуль. Скорость тела за время удара измениться не успевает и оно начнёт скользить по бруску. В процессе скольжения тело теряет свою скорость. В момент окончания скольжения тела относительно бруска, скорости тела и бруска сравниваются, становясь равными некоторому значению $\bar{v}_1$ (Рис. 7-10,в,с). Применим теорему об изменении кинетической энергии к системе тело–брусок:

$$\frac{(M+m)v_1^2}{2} - \left(\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) = A_{fr} \qquad (1)$$

Здесь v_1 - скорость бруска и тела в тот момент, когда тело остановилось относительно бруска; A_{fr} - полная работа силы трения, равная сумме работ силы трения над телом A_{fr1} и силы трения над бруском A_{fr2}:

$A_{fr} = A_{fr1} + A_{fr2} = F_{fr} \cdot x_1 + \left(-F'_{fr} \cdot x_2\right)$, где $F_{fr} = F'_{fr}$, согласно третьему закону Ньютона; x_1 и x_2 - модули перемещений тела и бруска соответственно от момента удара до момента окончания скольжения тела относительно бруска в неподвижной системе отсчёта.

$$A_{fr} = \mu mg \cdot x_1 - \mu mgx_2 = -mg\left(x_2 - x_1\right)$$

Из рисунка 7-10б,в следует: $L + x_1 + x = x_2 + L$. Откуда: $x_2 - x_1 = x$, где x – расстояние, пройденное телом относительно бруска. Следовательно:

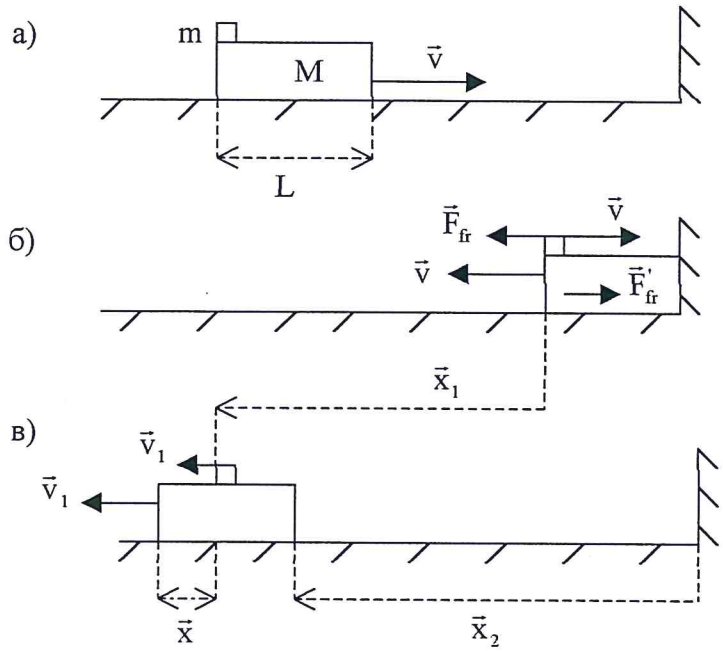


Рис. 7-10.
Движение бруска массы M и тела массы m:
а) До удара;
б) В момент сразу после удара
в) В момент, когда тело прошло расстояние x относительно бруска.
$\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ - перемещения тела и бруска от момента удара до момента окончания скольжения тела относительно бруска.
x – расстояние, пройденное телом относительно бруска.

$$A_{fr} = -\mu mgx \qquad (2)$$

Закон сохранения импульса системы тело – брусок, которая является замкнутой в течение всего времени скольжения тела относительно бруска (в проекциях на ось x), выражается уравнением:

$$Mv - mv = (M+m)v_1 \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1),(2) и (3), найдём, на какое расстояние x переместится тело относительно бруска до окончания скольжения:

$$x = \frac{2Mv^2}{\mu g(M+m)}$$

Условие x = L позволяет найти искомую минимальную скорость, при которой произойдёт падение тела с бруска:

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}\mu g L\left(1+\frac{m}{\mu}\right)} \quad ; \quad v = 0{,}84 \text{ м/с}.$$

Задача 7-9

Шайба массы m = 0,1 *кг* соскальзывает с горизонтальной платформы P на неподвижно стоящую тележку, имея начальную скорость v_0 = 2 *м/с* (Рис.7-11).
Далее шайба продолжает движение по поверхности тележки с трением. Масса тележки M = 0,5 *кг*. Коэффициент трения между шайбой и поверхностью тележки μ = 0,6. Тележка катится по рельсам без трения. Определить:

1) скорость тележки v_1 к тому моменту времени, когда шайба остановится на ней;
2) время t движения шайбы по поверхности тележки;
3) изменение внутренней энергии системы тел шайба – тележка ΔU;
4) часть механической энергии системы, которая перешла во внутреннюю;
5) работу силы трения A_{fr} и расстояние x, которое прошла шайба относительно тележки.

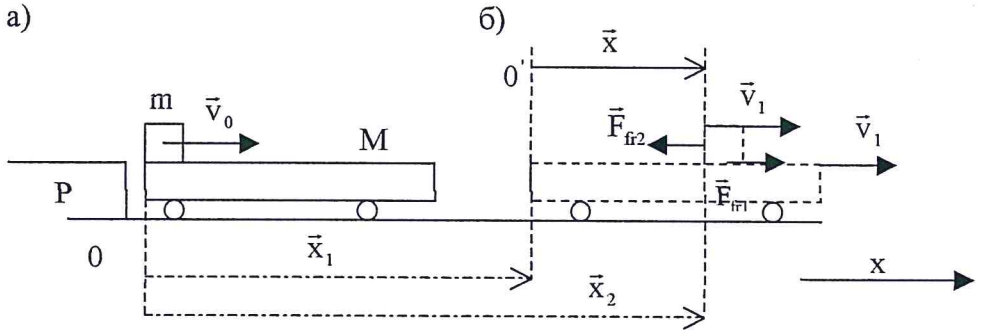


Рис. 7-11. Шайба и тележка в процессе движения. 0x – система отсчёта, неподвижная относительно Земли.

а) Положение шайбы, обладающей импульсом $m\vec{v}_0$ на неподвижной тележке в момент времени t = 0.

б) Взаимное положение шайбы и тележки в момент времени t, когда шайба остановилась относительно тележки. Скорости обоих тел в этот момент $\vec{v}_1$.

$\vec{x}_2$ и $\vec{x}_1$ - перемещения шайбы и тележки за время t, соответственно, в неподвижной системе отсчёта.

0x - система отсчёта, связанная с тележкой. $\vec{x}$ - перемещение шайбы за время t в системе 0x. (Отсчёт времени одинаков в обеих системах отсчёта).

$\vec{F}_{fr2}$ и $\vec{F}_{fr1}$ - силы трения, действующие в течение времени t и приложенные к шайбе и тележке, соответственно.

Решение задачи 7-9

1) Воспользуемся законом сохранения импульса для системы тел шайба–тележка. Эта система замкнутая, поскольку все внешние силы скомпенсированы и тележка катится по рельсам без трения. Что касается сил трения между шайбой и тележкой, $\vec{F}_{fr}$ и F_{fr}', то они, являясь внутренними силами, не изменяют импульс системы. Приравнивая импульс системы в момент времени t=0 (шайба остановилась на платформе), получим:

$$mv_0 = (M + m)v_1 \qquad (1)$$

Отсюда искомая скорость тележки в момент остановки шайбы:

$$v_1 = \frac{m}{M+m} v_0 \qquad (2)$$

Подставляя числовые данные: $v_1 = 0{,}33$ *м/с*

2) Напишем теорему об изменении импульса применительно к шайбе в неподвижной системе отсчёта:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \vec{F}_{fr} t \qquad (3)$$

В проекциях на 0x: $mv_1 - mv_0 = -\mu mg \cdot t$

Отсюда: $t = \frac{v_0 - v_1}{\mu g}$. Подставляя v_1 из (2), получим:

$$t = \frac{v_0}{\mu g} \cdot \frac{M}{M+m} \qquad (4)$$

t – время движения шайбы по поверхности тележки.

Подстановка числовых значений даёт: t=0,28 *с.*

3) Применим закон сохранения энергии для системы тел шайба–тележка–Земля. Система неконсервативная и изолированная. Неконсервативность обусловлена наличием внутренних неконсервативных сил – сил трения. Работа этих сил будет уменьшать механическую энергию системы, переводя часть её во внутреннюю энергию. Поскольку система изолированная, то полностью исключен энергообмен с телами вне системы. Закон сохранения энергии запишется в форме:

$$\Delta E + \Delta U = 0 \qquad (5)$$

где ΔE – изменение механической энергии системы, в данном случае – уменьшение кинетической энергии, т.к. потенциальная – не изменяется ($\Delta E < 0$);

ΔU – изменение внутренней энергии системы ($\Delta U > 0$). Из (5) следует:

$$\Delta U = -\Delta E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)v_1^2}{2}$$

Используя соотношение (2), получим искомое увеличение внутренней энергии системы:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Mm}{M+m} \cdot v_0^2 \qquad (6)$$

Учитывая числовые данные: $\Delta U = 0{,}17$ *Дж*

4) Подсчитаем, какая часть механической энергии перешла во внутреннюю

$$n = \frac{\Delta U}{\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)} = \frac{M}{M+m} \qquad (7)$$

$$n = 0{,}83 = 83\%$$

5) Работа силы трения состоит в данном случае из работы силы трения $\vec{F}_{fr2}$ над шайбой и работы силы трения $\vec{F}_{fr1}$ над тележкой (Рис.7-11):

$$A_{fr} = A_{fr2} + A_{fr1}, \text{ где}$$

$$A_{fr2} = -F_{fr2} \cdot x_2$$

$$A_{fr1} = F_{fr1} \cdot x_1$$

Учтя, что силы трения связаны третьим законом Ньютона: $\vec{F}_{fr2} = -\vec{F}_{fr1}$, или по модулю: $F_{fr2} = F_{fr1} = \mu \cdot mg$, получим для работы силы трения:

$$A_{fr} = -\mu mg \cdot x_2 + \mu mg \cdot x_1 = -\mu mg(x_2 - x_1) \qquad (8)$$

Из рисунка 7-11 очевидно соотношение:

$$x_2 = x_1 + x \qquad (9)$$

Следовательно, из (8) и (9) работа силы трения:

$$A_{fr} = -\mu mgx \qquad (10)$$

Таким образом, работа силы трения отрицательная и равна произведению модулей силы трения скольжения и перемещения шайбы относительно тележки.

Применим теорему об изменении кинетической энергии для шайбы:

$$\Delta E_k = A_{fr} \qquad (11)$$

Поскольку $\Delta E = \Delta E_k = -\Delta U$, что следует из выражения (5), имеем:

$$A_{fr} = -\Delta U = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Mm}{(M+m)} \cdot v_0^2 \qquad (12)$$

Сравнив два выражения для A_{fr}, (10) и (12), получим искомую величину x:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{(M+m)} \cdot \frac{v_0^2}{\mu g} \qquad (13)$$

Численные значения последних двух величин: $A_{fr} = -0{,}17$ *Дж*; $x = 0{,}28$ *м*.

Задача 7-10

Шар массой m, обладающий скоростью $\vec{v}_1$, догоняет второй шар массой M, движущийся в том же направлении си скоростью $\vec{v}_2$. Размеры шаров одинаковы, соударение центральное и абсолютно – неупругое, трение шаров о горизонтальную плоскость отсутствует.

1) Определить скорости шаров после их столкновения.
2) Определить, какая часть механической энергии перешла во внутреннюю в результате столкновения.
3) Провести анализ полученных результатов.

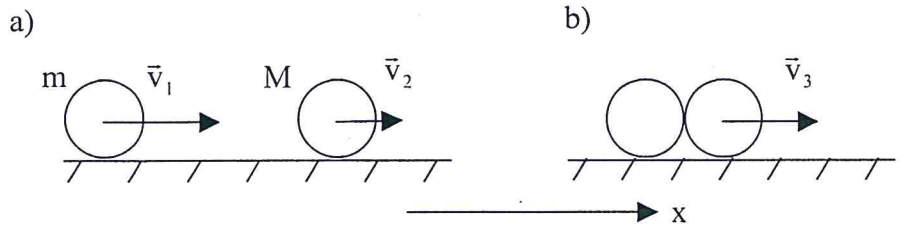


Рис. 7-12. Движение шаров: a) до столкновения; b) после столкновения.

Решение задачи 7-10

1) Система двух шаров является замкнутой, поскольку силы тяжести шаров компенсированы соответствующими реакциями со стороны горизонтальной плоскости и отсутствует трение при их движении. Закон сохранения импульса запишется векторным соотношением: $m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = (m+M)\vec{v}_3$ (напомним, что после неупругого соударения скорости шаров одинаковы). В проекциях на ось x:

$$mv_1 + Mv_2 = (m + M)v_3 \qquad (1)$$

Откуда скорости шаров после взаимодействия:

$$v_3 = \frac{mv_1 + Mv_2}{m + M} \qquad (2)$$

2) Для нахождения части механической энергии, перешедшей во внутреннюю, напишем закон сохранения энергии для системы тел: два шара + Земля. Эта система неконсервативная из-за неупругого взаимодействия шаров и изолированная, т.к. отсутствует энергообмен с внешними телами (внешние тела не совершают работы над системой и наоборот). Закон сохранения энергии может быть записан в виде: $\Delta E + \Delta U = 0$ (3)

где: $\Delta E = \Delta E_k$ - изменение механической энергии системы равное изменению (уменьшению) её кинетической энергии при неизменной потенциальной энергии;

ΔU - изменение (увеличение) внутренней энергии системы в виде тепловой. Распишем соотношение (3) с учётом (2):

$$\frac{(m + M)v_3^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - \frac{Mv_2^2}{2} + \Delta U = 0$$

$$\Delta U = \frac{mM(v_1 - v_2)^2}{2(m + M)} \qquad (4)$$

Искомая часть механической энергии, перешедшей во внутреннюю в результате соударения шаров, выразится соотношением:

$$n = \frac{\Delta U}{\left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}\right)}$$

Отсюда следует:

$$n = \frac{mM(v_1 - v_2)^2}{(m + M)(mv_1^2 + Mv_2^2)} \qquad (5)$$

3) Проанализируем полученные результаты (2) и (5).

А) Если шары движутся с одинаковыми скоростями $v_1=v_2=v$, то соударения не произойдёт, $v_3=v$, и не произойдёт превращения механической энергии во внутреннюю, $\Delta U = 0$ (из 4) и $n=0$.

Б) Пусть шары имеют одинаковые массы, $m=M$, и движутся навстречу друг другу с равными скоростями, $v_2=-v_1$. Тогда, в результате неупругого соударения шары должны остановиться, $v_3=0$, т.е. вся механическая энергия системы перешла во внутреннюю, $n=1$.

В) Для случая, когда первое тело массой m ударяет в неподвижное второе тело массой M, т.е., когда $v_2=0$ и $v_1=v_0$, тела после взаимодействия движутся в сторону $\bar{v}_0$ со скоростью $v_3 = \frac{m}{m + M} v_0$. Часть механической энергии, перешедшей во внутреннюю, в этом частном случае зависит лишь от отношения масс шаров:

$$n = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{M}{M + m} \qquad (6)$$

8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Периодические колебания – это движения или процессы, повторяющиеся во времени. Из всевозможных периодических колебаний наибольший интерес представляют гармонические колебания, происходящие по закону косинуса (синуса). Математика даёт способ разложения негармонических колебаний на конечное или бесконечное число гармонических составляющих. Поэтому, в итоге, всякое колебание сводится к гармоническому.

Система, совершающая гармонические колебания, обладает тем свойством, что имеет одно положение, в котором она может пребывать сколь угодно долго, будучи предоставленная самой себе – это положение равновесия. Система, выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе, совершает собственные **колебания**. Колебания, совершаемые под воздействием внешних сил, называются **вынужденными**. Если энергия системы не изменяется во времени, то её колебания – **незатухающие**. Колебания с уменьшающейся энергией – **затухающие**.

Рассмотрим более подробно собственные незатухающие гармонические колебания механической колебательной системы. Отклонение механической системы от положения равновесия называется **смещением**. Наибольшее смещение называется **амплитудой**. Периодические колебания совершаются циклично. Начиная с некоторого времени, все положения последовательно повторяются. Движение системы в течение одного цикла называется **полным колебанием** Время одного полного колебания называется **периодом колебаний.** Если за время t система совершила N полных колебаний, то период колебаний равен:

$$T = \frac{t}{N} \tag{8.1}$$

Число полных колебаний, совершенных за единицу времени, называется частотой колебаний:

$$f = \frac{N}{t} \tag{8.2}$$

Из сопоставления (8.1) и (8.2) видно, что период и частота – величины обратные:

$$T = \frac{1}{f} \tag{8.3}$$

В системе СИ частота выражается в герцах (Hz). 1Hz – частота колебательного процесса, при которой за одну секунду происходит один цикл этого процесса:

$$1\text{Hz} = 1\frac{1}{c}$$

В качестве примера рассмотрим следующие гармонические колебательные системы: пружинный маятник, а также физический и математический маятники.

Пружинный маятник.

Горизонтальный пружинный маятник состоит из шарика массой m, который может без трения скользить по горизонтальному стержню (Рис.8-1). К шарику и к неподвижной стенке прикреплена пружина жёсткостью K и пренебрежимо малой массой. Деформация пружины равна нулю, когда шарик находится в точке O (положение равновесия). Смещение шарика, x, от положения равновесия в любой момент времени

равно деформации пружины. Пружинный маятник совершает колебания около положения О. Сила, действующая на шарик в процессе движения, $\vec{F}$ - это сила упругости пружины, подчиняющаяся закону Гука:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad (8.4)$$

где $\vec{x}$ - вектор смещения шарика от положения равновесия; К – жёсткость пружины, т.е. коэффициент, численно равный силе, вызывающей деформацию, равную единице и несущий размерность: *Ньютон/метр* (*Н/м*). Знак минус в векторном соотношении (8.4) говорит о противоположности направлений силы упругости и смещения (Рис.8-1а) в любой момент времени.

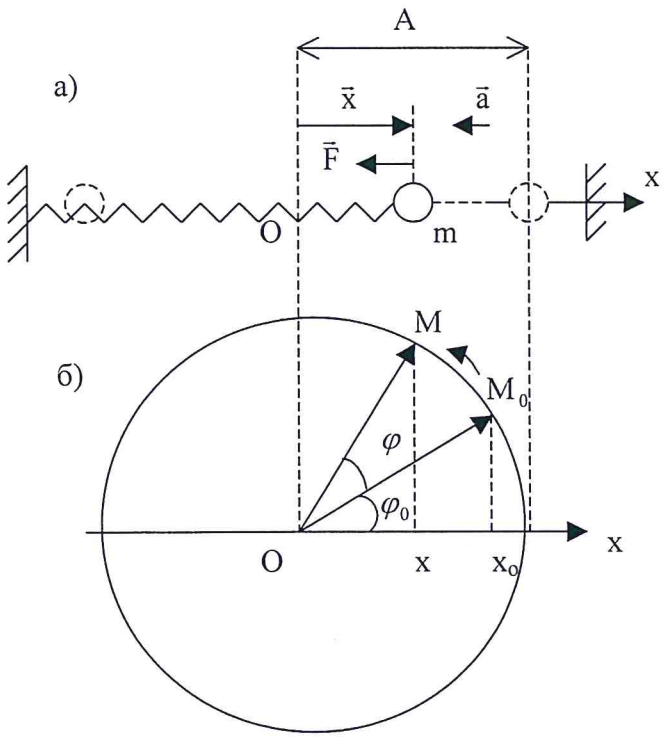


Рис. 8-1
а) Движение тела, прикреплённого к пружине (пружинный маятник).
m – масса тела
$\vec{F}$ - сила упругости
$\vec{x}$ - вектор смещения тела от положения равновесия
A - амплитуда.
b) Движение точки по окружности радиуса A и её проекции по оси Ox.

Для того, чтобы составить уравнение гармонических колебаний пружинного маятника, напишем второй закон Ньютона для шарика:

$$m\vec{a} = \vec{F} = -k\vec{x}$$

Сила тяжести шарика не входит в уравнение, поскольку она компенсирована силой реакции стержня. Второй закон в проекциях на ось Ox: $ma = -kx$, отсюда:

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad (8.5)$$

Из выражения (8.5) следует, что $\vec{x}$ и $\vec{a}$ взаимно противоположны при любом смещении. Поскольку смещение $\vec{x}$ всегда направлено от положения равновесия, то $\vec{a}$ всегда имеет направление к положению равновесия и по модулю пропорционально смещению. Это справедливо для любой системы, совершающей гармонические колебания. Следовательно, выражение (8.5) может служить определением гармонических колебаний.

Напомним, что ускорение – вторая производная смещения по времени, т.е.:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (8.6)$$

Уравнение гармонических колебаний пружинного маятника, с учётом (8.5) и (8.6), обычно записывается в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (8.7)$$

Это – линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решить его – значит найти зависимость $x(t)$, подстановка которого в (8.7) превращает уравнение в тождество. Однако, сделать это средствами обычной алгебры нельзя. Поэтому используем приём, позволяющий получить решение доступными нам средствами. Для этого рассмотрим равномерное движение точки по окружности и проследим за движением её проекции на ось, совпадающую с диаметром окружности. Если точка движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса A (Рис.8-1в), то её проекция на ось Ox совершает гармонические колебания с амплитудой A и с циклической частотой ω. Пусть в начальный момент времени ($t=0$) точка находилась в положении M_0, определяемом углом φ_0 (отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки). Положение её проекции на ось Ox определяется координатой x_0, отсчитываемой от центра окружности. Чтобы найти закон изменения координаты проекции движущейся точки от времени, $x(t)$, вновь обратимся к рисунку (8-1б). Пусть в момент времени t движущаяся по окружности точка оказалась в положении M. Угол, определяющий новое положение точки, увеличился на величину $\varphi=\omega\cdot t$ и стал равным $(\varphi+\varphi_0)$. Координата x проекции точки в момент времени t равна:

$$x = A\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \qquad (8.8)$$

Рассмотрим, будет ли выражение (8.8) решением уравнения гармонических колебаний пружинного маятника (8.7) и если будет, то при каких условиях. Для этого найдём первую и вторую производные от координаты по времени, пользуясь выражением (8.8):

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \qquad (8.9)$$

Если выражение (8.8) является решением уравнения гармонических колебаний пружинного маятника, то, подставив его и (8.9) в (8.7), мы должны получить тождество (т.е. равенство, справедливое при любом значении t):

$$-A\omega^2\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m}\cdot A\cdot\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \equiv 0;$$

$$A\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \equiv 0 \qquad (8.10)$$

Поскольку ни амплитуда колебаний A, ни $\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0)$ не равны нулю тождественно, то для удовлетворения (8.10) необходимо, чтобы $-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$. Т.о., выражение (8.8)

действительно обращает уравнение (8.7) в тождество и является законом колебаний пружинного маятника при условии:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (8.11)$$

Этот закон должен подчиняться условию периодичности:

$$x(t) = x(t + nT),$$

где T – период незатухающих колебаний пружинного маятника, n – целое число.
Это условие принимает вид:

$$A\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) = A\mathrm{Cos}[\omega(t + nT) + \varphi_0]$$

Равенство косинусов означает, что аргументы отличаются на $2\pi n$, т.к. косинус – периодическая функция с периодом 2π. Поэтому:

$$\omega t + \varphi_0 + 2\pi n = \omega t + \omega nT + \varphi_0$$

Откуда следует, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (8.12)$$

Следовательно, круговая или циклическая частота ω равна числу полных колебаний, которые совершает колебательная система за 2π единиц времени. Величина ω связана с параметрами системы условием (8.11). Теперь можно вычислить период собственных колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (8.13)$$

Физический и математический маятники.

Физическим маятником называется тело, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр массы (Рис.8-2).

Поскольку маятник совершает вращательное движение вокруг точки O, то уравнение колебаний получим из уравнения динамики вращательного движения:

$$I \cdot \varepsilon = \sum M_i \qquad (8.14)$$

где правая часть – сумма моментов всех приложенных сил относительно неподвижной оси O; I – момент инерции маятника относительно оси вращения;
ε - угловое ускорение.

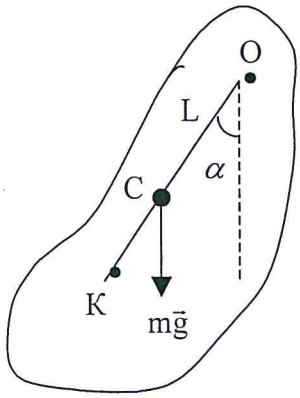


Рис. 8-2
Физический маятник.
O – неподвижная ось подвеса.
C – центр массы.
α- угол отклонения от положения равновесия.
OC = L – расстояние от оси подвеса до центра массы.
OK = L_0 – приведённая длина.
K – центр качания.

На маятник действует момент силы тяжести, равный $mgL\mathrm{Sin}\alpha$. Момент силы реакции равен нулю. Ограничимся малыми углами, для которых $\mathrm{Sin}\alpha \approx \alpha$ (в радианах). (Отличие $\mathrm{Sin}\alpha$ от α для углов до 9° не превышает 0,5%).

Поскольку направление углового ускорения противоположно направлению угла при любом угловом смещении маятника от положения равновесия, уравнение (8.14) следует переписать в виде: $-mgL\alpha = I\varepsilon$,

где угловое ускорение равно второй производной угла по времени: $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

Уравнение гармонических колебаний физического маятника принимает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{L} \cdot \alpha = 0 \qquad (8.15)$$

Оно аналогично по форме уравнению гармонических колебаний пружинного маятника (8.7) и отличается лишь постоянным коэффициентом при аргументе. Его решение подобно (8.8):

$$\alpha = \alpha_m \mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \qquad (8.16)$$

Здесь α_m - максимальное отклонение маятника от положения равновесия.

Подставляя α из (8.16) и $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\alpha_m \omega^2 \mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0)$ в уравнение (8.15), мы получим тождество:

$$-\alpha_m \omega^2 \mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) + \frac{mgL}{I} \cdot \alpha_m \mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \equiv 0,$$

которое останется справедливым в любой момент времени при условии:

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I} \qquad 8.17)$$

Следовательно, при условии (8.17) выражение (8.16) является законом гармонических колебаний физического маятника. Период незатухающих колебаний физического маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (8.18)$$

Частным случаем физического маятника является **математический маятник**, представляющий собой материальную точку “подвешенную” на нерастяжимой и невесомой нити (Рис.8-3). Если применить уравнение динамики вращательного движения, то все уравнения окажутся такими же, как для физического маятника. При этом момент инерции материальной точки массы m относительно оси, проходящей через точку О перпендикулярно плоскости, равен:

$$I = mL^2$$

Уравнение гармонических колебаний математического маятника примет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{mL^2}\alpha = 0, \text{ или}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \alpha = 0 \qquad (8.19)$$

Закон колебаний математического маятника имеет форму (8.16), где

$$\omega^2 = \frac{mgL}{mL^2} = \frac{g}{L} \qquad (8.20)$$

Период собственных колебаний математического маятника будет равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (8.21)$$

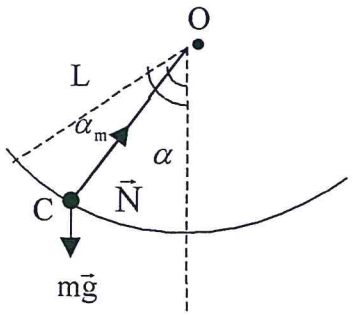


Рис. 8-3. Математический маятник.
O – неподвижная ось подвеса.
C – материальная точка массы m.
α - угол отклонения от положения равновесия.
$m\vec{g}$ - сила тяжести.
$\vec{N}$ - реакция подвеса.
α_m - максимальный угол отклонения.
L – длина подвеса.

Как было найдено, период незатухающих собственных колебаний физического маятника равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

где I – момент инерции маятника относительно оси подвеса, L – расстояние от оси подвеса до центра масс, m – масса маятника. Найдём, при какой длине L_0 математического маятника, его период собственных колебаний будет равен периоду собственных колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

$$L_0 = \frac{I}{mL} \qquad (8.22)$$

Следовательно, период собственных колебаний физического маятника совпадает с периодом собственных колебаний такого математического маятника, который имеет длину L_0, рассчитанную из (8.22). Длина L_0 называется **приведённой длиной физического маятника**. Точка K на продолжении прямой OC (Рис.8-2), находящаяся на расстоянии $L_0 = OK$ от оси подвеса, называется **центром качаний физического маятника**. При этом для любого физического маятника $L_0 > L$. Точка O оси подвеса и центр качаний K обладают свойством взаимности: если ось подвеса сделать проходящей через точку K, то точка O прежней оси подвеса станет новым центром качаний и период колебаний не изменится.

Задачи к разделу 8 и их решения

Задача 8-1

Представим себе невероятное: по одному из диаметров земного шара прорыта сквозная шахта. В шахту брошено тело без начальной скорости. Пренебрегая всеми силами, кроме силы тяготения и считая плотность Земли одинаковой во всех точках:

1) Описать характер движения тела;
2) Найти время достижения телом центра Земли;
3) Определить максимальную скорость, которую достигнет тело в процессе падения.

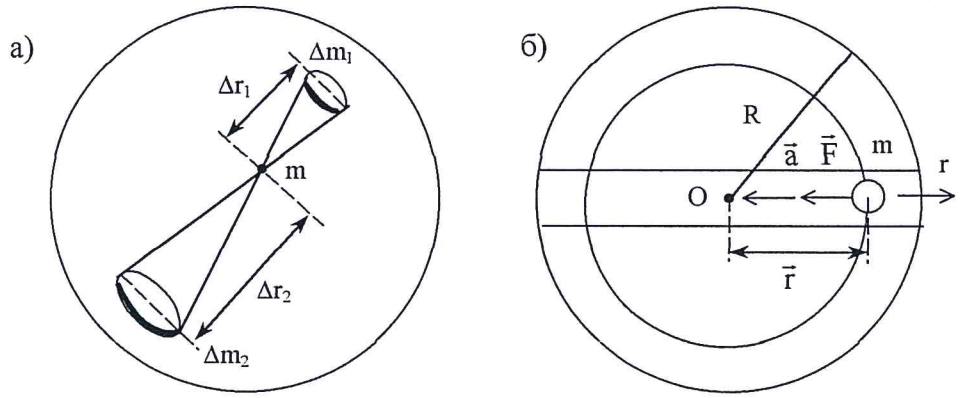


Рис. 8-4. а) Два элемента $(\Delta m)_1$ и $(\Delta m)_2$, вырезанные конической поверхностью с вершиной в точке m из тонкого сферического слоя.
б) Тело m свободно падает в глубь шахты. Показан момент, когда тело проходит точку на расстоянии r от центра Земли. Существенным является взаимно-противоположное направление векторов $\vec{r}$ и $\vec{a}$.

Решение задачи 8-1

1) Покажем, что сила, действующая со стороны произвольного шарового слоя на материальную точку, как угодно расположенную внутри этого слоя, равна нулю. Для доказательства разобьём шаровой слой на тонкие сферические слои. На рисунке 8-4,а показаны один из таких слоёв и внутри него материальная точка массы m. Проведём конус с малым телесным углом $\Delta\Omega$ и с вершиной в точке M. Конус вырезает из сферического слоя два элемента, масса которых $(\Delta m)_1$ и $(\Delta m)_2$, расположенные на расстоянии r_1 и r_2 от материальной точки соответственно. Силы, действующие со стороны сферических элементов на точку массы m, равны:

$$F_1 = G\frac{m\cdot(\Delta m)_1}{r_1^2}$$

$$F_2 = G\frac{m\cdot(\Delta m)_2}{r_2^2}$$

и направлены в противоположные стороны (Рис.8-4) Здесь G – гравитационная постоянная. Распишем массы элементов:

$$(\Delta m)_1 = (\Delta S)_1 \cdot \Delta r \cdot \rho$$
$$(\Delta m)_2 = (\Delta S)_2 \cdot \Delta r \cdot \rho$$

где $(\Delta S)_1$ и $(\Delta S)_2$ - площади элементов сферического слоя, выраженные конусом; Δr - толщина сферического слоя; ρ - плотность земного шара, одинаковая в каждой точке. Суммарная сила, действующая на точку m со стороны обоих элементов:

$$F = F_1 - F_2 = G \cdot m \cdot \rho \cdot \Delta r\left(\frac{(\Delta S)_1}{r_1^2} - \frac{(\Delta S)_2}{r_2^2}\right).$$

В нашем случае оба элемента вырезаны одним конусом. Согласно определению, телесный угол измеряется отношением площади вырезанной части сферы с центром в вершине конической поверхности к квадрату радиуса сферы. Поэтому телесный угол нашего конуса равен:

$$\Delta\Omega = \frac{(\Delta S)_1}{r_1^2} = \frac{(\Delta S)_2}{r_2^2}$$

Отсюда следует, что равнодействующая сил притяжения к этим элементам равна нулю:

$$F = F_1 - F_2 = 0$$

Разбивая весь сферический слой на такие элементы, получаем приведённое выше утверждение о том, что шаровой слой произвольной толщины не воздействует на материальную точку, расположенную где-либо внутри этого слоя.

Для выяснения характера движения тела, падающего в глубь шахты, рассмотрим движущееся тело в момент времени, когда оно находится на расстоянии r от центра Земли O (Рис. 8-4,б). Слой Земли толщиной R – r (R – радиус Земли), пройденный телом к рассматриваемому моменту времени, уже не действует на тело. На него действует только масса той части Земли, которая заключена внутри сферы радиуса r. Действующая на тело сила равна:

$$F = Gm \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi Gm\rho \cdot r$$

Для упрощения этого выражения напишем, чему равна сила тяжести на поверхности Земли:

$$mg = Gm \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \cdot \rho \cdot R$$

Из двух последних выражений следует, что

$$F = mg \cdot \frac{r}{R} \qquad (1)$$

Здесь R – радиус Земли, g – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Уравнение второго закона Ньютона для свободно падающего тела в шахту, имеет вид $ma = -\frac{mg}{R} \cdot r$, или:

$$a = -\frac{g}{R} \cdot r \qquad (2)$$

Т.е. ускорение пропорционально смещению r от положения равновесия (точка O – центр Земли) и направлено к центру Земли (Рис.8-4,в). Это, как отмечалось, является

признаком гармонического колебания. Следовательно, характер движения тела – гармонические колебания относительно центра Земли согласно уравнению:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{g}{R} \cdot r = 0 \qquad (3)$$

Это следует из (2) с учётом, что $a = \frac{d^2r}{dt^2}$.

Частота гармонического колебания: $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, отсюда, период полного колебания тела:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (4)$$

2) Тело достигнет центра Земли за время, равное четверти периода полного колебания:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \ ; \ t \approx 21 \text{ минута.}$$

Поскольку период колебаний не зависит от амплитуды, то время t не зависит от того, на каком расстоянии от центра Земли тело начнёт своё движение (без начальной скорости). Единственное требование состоит в том, чтобы это расстояние было много больше размеров тела и не превышало радиуса Земли.

3) При свободном падении тело достигнет максимальной скорости v_{max} в момент прохождения центра Земли. Если тело начало падать с поверхности Земли (амплитуда колебания R), то решение уравнения (3) будет:

$$r = R\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \qquad (5)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Дифференцируя (5), получим выражение для скорости:

$$v = \frac{dr}{dt} = -\omega R \cdot \mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0)$$

Отсюда максимальная скорость:

$$v_{max} = \omega R = R \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{gR} \qquad v_{max} = 7{,}9 \text{ км/с.}$$

Максимальная скорость оказалась численно равной первой космической скорости Земли.

Выражение v_{max} можно получить и энергетическим способом: изменение кинетической энергии тела равно работе силы $\bar{F}$. Поскольку сила линейно изменяется с расстоянием r (см. раздел 1), то работа легко вычисляется через среднее значение силы:

$$A = F_m \cdot R = \frac{1}{2} mg \frac{r}{R} \cdot R$$

При движении с поверхности Земли r = R и $A = \frac{1}{2} mgR$; $\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} mgR$.

Отсюда: $v_{max} = \sqrt{gR}$.

Задача 8-2

На двух вращающихся в противоположные стороны валиках лежит горизонтально доска. Направления вращения валиков показаны на рисунке 8-5 стрелками. Расстояние между осями валиков 2L = 2 m. Коэффициент трения скольжения между доской и каждым из валиков μ = 0.5. В начальный момент времени центр масс доски был смещён на расстоянии A = 0.3 m от средней линии OO.

1) Показать, что доска будет совершать гармонические колебания под действием сил трения.
2) Написать уравнение движения доски.
3) Найти период колебаний.
4) Определить, какова скорость доски в момент, когда её центр масс проходит через среднюю линию OO (положение равновесия).

Решение задачи 8-2

1) На доску массы m со стороны валиков будут действовать силы трения $F_1 = \mu N_1$ и $F_2 = \mu N_2$, где μ - коэффициент трения скольжения между доской и каждым из валиков, N_1 и N_2 - силы нормальной реакции каждого из валиков. Направления сил трения показаны на рисунке 8-6.

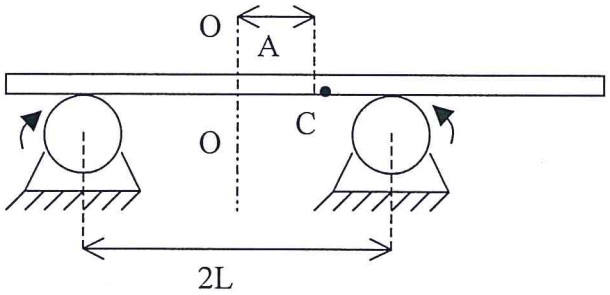


Рис. 8-5. В начальный момент времени центр массы доски C смещён на величину A от средней линии OO.

Найдём результирующую силу $\vec{F}$, действующую на доску, в момент её смещения $\vec{x}$ от средней линии OO:

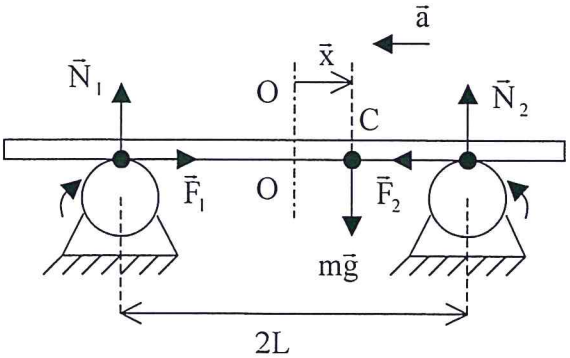


Рис. 8-6. Силы, действующие на доску, при её смещении $\vec{x}$ от средней линии OO между валиками.
C – центр массы доски.

$$F = F_2 - F_1 = \mu(N_2 - N_1) \qquad (1)$$

Поскольку доска не совершает движений в вертикальном направлении правомочно написать два уравнения моментов относительно точек касания доски и валиков:

$$\begin{cases} N_2 \cdot 2L - mg(L - x) = 0 \\ -N_1 \cdot 2L + mg(L + x) = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$N_2 - N_1 = \frac{mg}{L} \cdot x$$

Подставляя в (1):

$$F = \frac{\mu \cdot mg}{L} \cdot x \qquad (2)$$

При смещении доски на величину x от положения равновесия, действующая на доску сила равна:

$$F = -\frac{\mu mg}{L} \cdot x$$

При этом закон Ньютона запишется в виде:

$$m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu mg}{L} \cdot x$$

Следовательно, ускорение $\bar{a}$ в любой момент времени по модулю пропорционально смещению x и направлено в сторону, противоположную $\bar{x}$, т.е. – к положению равновесия. Это признак того, что доска, в процессе движения, совершает гармонические колебания.

2) Уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu g}{L} x = 0 \qquad (3)$$

и его решение:

$$x = A\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi_0) \qquad (4)$$

где $\omega^2 = \frac{\mu g}{L}$

3) Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\mu g}} \qquad (5)$$

$$T = 2{,}8\ c$$

4) Для нахождения максимальной скорости, которую будет иметь доска в момент прохождения положения равновесия, найдём производную уравнения (4) и из него – амплитудное значение скорости:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{max} = A \cdot \omega = A \cdot \sqrt{\frac{\mu g}{L}} \qquad (6)$$

$$V_{max} = 0{,}67\ м/с$$

Задача 8-3

Тонкий однородный стержень длиной L совершает гармонические колебания относительно горизонтально расположенной неподвижной оси. Считая колебания стержня незатухающими, определить:

1) Как зависит период колебаний от расстояния между центром масс стержня и осью вращения?

2) Построить график зависимости, указанной в первом пункте и провести её анализ.

Решение задачи 8-3

1) Свяжем начало отсчёта координаты x с центром масс C (Рис. 8-7). Пусть точка O – выход оси вращения стержня – имеет координату x. Тогда, согласно уравнению (8-18) теоретического введения этой главы, период незатухающих гармонических колебаний стержня (физического маятника) равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}}$, где:

I – момент инерции однородного стержня длиной L относительно оси подвеса

x – расстояние от центра масс до оси подвеса.

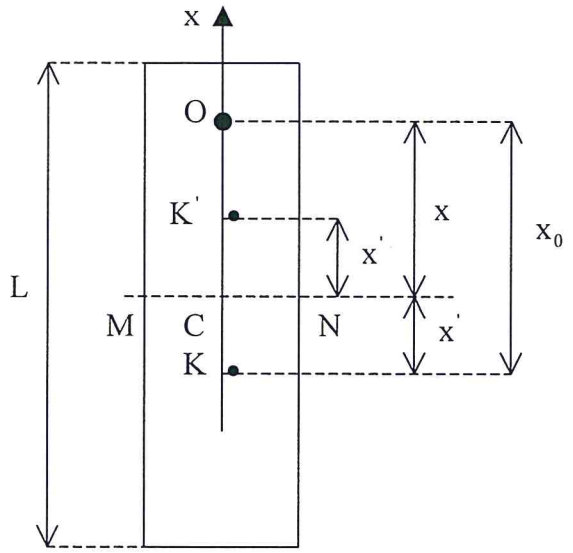


Рис. 8-7.
C – центр масс стержня и точка начала отсчёта координаты x.
K – центр качаний стержня.
x_0 = OK – приведённая длина данного физического маятника.
$x' = CK = CK'$.

$$I = \frac{mL^2}{12} + mx^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{L^2}{12x} + x\right)} \qquad (1)$$

Используем понятие приведённой длины x_0 данного физического маятника, выраженное соотношением (8-22): $x_0 = \frac{I}{mx}$

Для нашего конкретного маятника: $x_0 = \frac{mL^2}{12mx} + \frac{mx^2}{mx} = \frac{L^2}{12x} + x$ (2)

Как следует из (2), при любом x из интервала $0 < x < \infty$, $x_0 > x$. Это значит, что центр качаний K для любого x из указанного интервала, лежит в области отрицательных значений x (Рис.8-7) на расстоянии x' от точки C.

Если ось вращения перенести из точки O в точку K, то стержень после поворота на 180° займёт новое устойчивое положение равновесия, а ось вращения окажется в точке K' на расстоянии x' от точки C в области положительных значений x. Новое расстояние от центра масс до оси вращения x' связано с прежним значением x выражением:

$$x' = x_0 - x = \frac{L^2}{12x} + x - x = \frac{L^2}{12x} \qquad (3)$$

Перенос оси из точки O в центр качаний K не изменит периода колебаний стержня. Это значит, что замена x в соотношении (1) на x' согласно выражению (3), оставит без изменения (1).

2) Для построения зависимости T(x), выраженную соотношением (1), найдём её экстремальные значения. Для этого приравняем нулю:

$$\frac{dT(x)}{dx} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2T \cdot g}\left(-\frac{L^2}{12x^2} + 1\right) = 0$$

Поскольку $\frac{4\pi^2}{2gT} \neq 0$, то $-\frac{L^2}{12x^2} + 1 = 0$. Отсюда $x = \pm\frac{L}{2\sqrt{3}}$.

Отрицательное значение x не физично, поскольку лишает смысла соотношение (1). Следовательно, искомая кривая имеет один экстремум при $x = \frac{L}{2\sqrt{3}}$, равный

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{L^2 \cdot 2\sqrt{3}}{12L} + \frac{L}{12\sqrt{3}}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L}{g}}$$

Второе значение координаты x', при которой период T останется неизменным, согласно выражению (3):

$$x' = \frac{L^2}{12x} = \frac{L^2 \cdot 2\sqrt{3}}{12L} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

Следовательно, для экстремального значения кривой T(x): $x = x' = \frac{L}{2\sqrt{3}}$.

Для построения кривой T(x) составим вспомогательную таблицу, приняв значения L = 1*м*, g = 10 *м/с*

Таблица 8-1

X (*м*)		x (*м*)		T (*с*)	
$\frac{L}{2\sqrt{3}}$	0,29	$\frac{L}{2\sqrt{3}}$	0.29	$2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{L}{g}}$	1,51
$\frac{L}{2}$	0,5	$\frac{L}{6}$	0.17	$2\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{g}}$	1,62
L	1,0	$\frac{L}{12}$	0.08	$2\pi\cdot\sqrt{\frac{13}{12}\cdot\frac{L}{g}}$	2,07
2L	2,0	$\frac{L}{24}$	0.04	$2\pi\cdot\sqrt{\frac{49}{24}\cdot\frac{L}{g}}$	2,84
4L	4,0	$\frac{L}{48}$	0.02	$2\pi\cdot\sqrt{\frac{193}{48}\cdot\frac{L}{g}}$	4,0
$\to\infty$		$\to 0$		$\to\infty$	

График зависимости T(x) показан на рисунке 8-8. Кривая имеет минимум $T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L}{g}}$ при $x = x' = \frac{L}{2\sqrt{3}}$. При $x \to 0$ кривая T(x) асимптотически стремится к бесконечности. При $x \to \infty$ $T(x) \to \infty$, как $\sqrt{x}$.

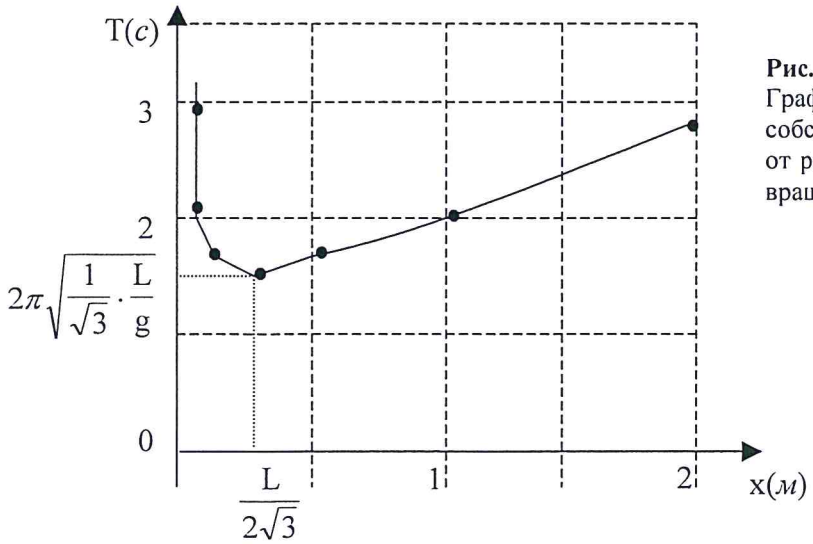


Рис. 8-8.
График зависимости периода собственных колебаний стержня от расстояния центра масс до оси вращения.

Задача 8-4

Как изменится период колебаний математического маятника, если:

1) Маятник находится в лифте, движущемся с ускорением a, направленным вверх;
2) Маятник находится в лифте, движущемся с ускорением a, направленным вниз;
3) Маятник находится в вагоне, который движется горизонтально с ускорением a;
4) Маятник укреплён на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости с углом наклона α.

Решение задачи 8-4

1) При движении лифта с постоянным ускорением $\vec{a}$, натяжение нити $\vec{N}$ маятника в положении его равновесия относительно лифта, определится из второго закона Ньютона (Рис.8-9):

$$ma = N - mg$$

Откуда:

$$N = m(g + a)$$

Следовательно, при отклонении маятника, сила, возвращающая его в положение равновесия, будет пропорциональна (g + a). Это значит, что в лифте, движущемся с ускорением, направленным вверх, маятник длиной L имеет период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a}}$$

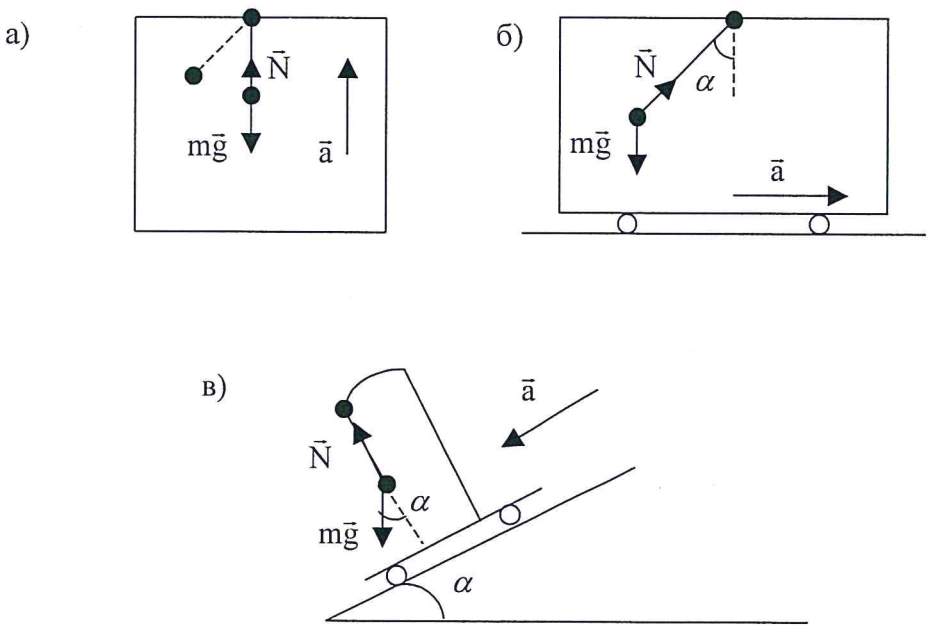


Рис. 8-9. Маятник:
а) в лифте, движущемся с ускорением a
б) в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a
в) на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости.

Период колебаний того же маятника в покоящемся или движущемся равномерно лифте будет:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Для сравнения найдём отношение периодов:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{g+a}}$$

Т.о., период колебаний уменьшился в $\sqrt{\frac{g}{g+a}}$ раз.

2) При движении лифта с ускорением, направленным вниз:

$$ma = mg - N$$

$$N = m(g - a)$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g-a}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{g-a}}$$

Период колебаний увеличился в $\sqrt{\frac{g}{g-a}}$ раз.

3) Когда маятник находится в вагоне, который движется горизонтально с ускорением $\vec{a}$, его положение равновесия (угол α по отношению к вертикали) и реакция $\vec{N}$ в положении равновесия определяется из второго закона Ньютона (Рис.8-9,в):

$$\begin{cases} ma = N\mathrm{Sin}\alpha \\ 0 = mg - N\mathrm{Cos}\alpha \end{cases}$$

Отсюда:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{g}$$

Возводя в квадрат уравнения системы и складывая их, получим:

$$N^2\left(\mathrm{Sin}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\alpha\right) = m^2\left(g^2 + a^2\right)$$

$$N = m\sqrt{g^2 + a^2}$$

При отклонении маятника от положения равновесия, определяемого углом $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{a}{g}$, сила, возвращающая его в положение равновесия, будет пропорциональна $\sqrt{g^2 + a^2}$. Следовательно, период колебаний маятника:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g^2 + a^2}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$$

Период колебаний маятника уменьшился в $\sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$ раз.

4) Покажем вначале, что нить маятника в положении равновесия перпендикулярна наклонной плоскости. Из второго закона Ньютона для тележки следует, что она будет скатываться с ускорением

$$a = g\mathrm{Sin}\alpha$$

Для того, чтобы шарик маятника имел такое же ускорение, необходимо, чтобы равнодействующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ (Рис.8-9,с), приложенных к шарику, была направлена параллельно наклонной плоскости и равна:

$$F = ma = mg\mathrm{Sin}\alpha$$

Но это равенство может иметь место лишь тогда, когда нить перпендикулярна наклонной плоскости. Колебания маятника относительно тележки будут вызываться действием силы $N = mg\mathrm{Cos}\alpha$, перпендикулярной к наклонной плоскости. Колебания будут происходить так, как будто бы ускорение свободного падения равнялось бы $g \cdot \mathrm{Cos}\alpha$. Поэтому период колебаний маятника на тележке, скатывающегося с наклонной плоскости, равен:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g \cdot \mathrm{Cos}\alpha}} = \frac{T_0}{\sqrt{\mathrm{Cos}\alpha}}$$

Т.о., период колебаний маятника при скатывании тележки с наклонной плоскости становится больше в $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\alpha}}$ раз.

Задача 8-5

Физический маятник состоит из однородного шара радиуса R, подвешенного на нерастяжимой и невесомой нити так, что расстояние от точки подвеса до центра масс шара равно L.

1) Определить, какова будет относительная ошибка в определении периода физического маятника, если для его вычисления пользоваться формулой математического маятника?

2) Каково должно быть отношение L/R физического маятника, чтобы его можно было считать математическим маятником с относительной ошибкой, не превышающей 5%; 1%; 0,1%; 0,01%?

Решение задачи 8-5

1) Период малых колебаний физического маятника определяется по формуле:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (1)$$

где:
I – момент инерции шарика относительно оси подвеса
m – масса шарика
L – расстояние от оси подвеса до центра масс шарика.

В случае данного физического маятника:

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mL^2 = mL^2\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]$$

Подставляя в (1), получим:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]} \qquad (2)$$

Период малых колебаний математического маятника:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (3)$$

Относительная ошибка (δ), которую мы допускаем, считая подвешенный шарик математическим маятником, будет:

$$\delta = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T}{T_0} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{L}\right)^2} - 1 \qquad (4)$$

2) Из формулы (4) найдём выражение для отношения L/R физического маятника, как функцию относительной ошибки δ:

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}(1+\delta)^2 - 1}} \qquad (5)$$

Выражение (5) позволяет вычислить минимальное отношение L/R физического маятника в зависимости от максимально допустимой ошибки при определении его периода по формуле для математического маятника. Результаты вычислений сведены в таблицу.

Таблица 8-2

Минимальные значения L/R физического маятника, при которых он может считаться математическим маятником, в зависимости от допустимой относительной ошибки.

Относительная ошибка, $\delta = \frac{T - T_0}{T_0}$, %	5,0	1,0	0,1	0,01
L/R	2	4,6	14,3	45,5

Из таблицы следует, что, чем выше требование к физическому маятнику, тем меньше допустимая относительная ошибка в определении его периода по формуле математического маятника, тем больше должно быть отношение длины нити (точки подвеса до центра масс шара) к радиусу шара.

Задача 8-6

Шарик, подвешенный на нити длиной L = 2 *м*, отклонили на угол $\alpha = 4°$ и отпустили. Считая колебания гармоническими и незатухающими, найти скорость шарика при прохождении им положения равновесия.

Проверить результат, найдя скорость шарика в момент прохождения им положения равновесия из уравнений механики.

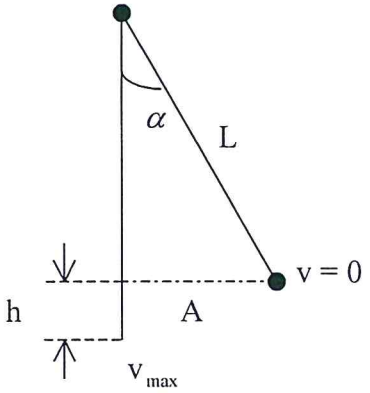


Рис. 8-10
Маятник длиной L.
v_{max} - максимальная скорость.
A – амплитуда.
h – максимальная высота поднятия шарика.

Решение задачи 8-6

1) При отсчёте времени от положения равновесия, уравнение движения шарика запишется так:

$$x = A\mathrm{Sin}\,\omega t$$

где:

A – амплитуда

x – смещение шарика от положения равновесия в момент времени t

ω – угловая частота

Скорость шарика в момент времени t:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \mathrm{Cos}\,\omega t = v_{max}\mathrm{Cos}\,\omega t$$

Следовательно, максимальное значение скорости в момент прохождения положения равновесия:

$$v_{max} = A \cdot \omega \qquad (1)$$

Амплитуда колебаний: $A = L\mathrm{Sin}\alpha$

Поскольку колебания гармонические, α можно считать малым $\mathrm{Sin}\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$ (радиан).

При малых α: α (радиан) = $\frac{2\pi\alpha}{360}$. Тогда:

$$A = \frac{2\pi\alpha \cdot L}{360} \qquad (2)$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в формулу (1) получим:

$$v_{max} = \frac{2\pi\alpha}{360} \cdot \sqrt{g \cdot L}\,; \quad V_{max} = 0{,}31 \text{ м/с}$$

2) Проверим результат, использовав закон сохранения энергии. Это возможно сделать, поскольку колебания незатухающие:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = mgh$$

где: h – максимальная высота поднятия шарика.
Отсюда:

$$v_{max} = \sqrt{2gh}$$

Из рисунка 8-10 видно, что $h = L(1 - \mathrm{Cos}\alpha)$, тогда:

$$v_{max} = \sqrt{2gL(1 - \mathrm{Cos}\alpha)}$$

что даёт тот же результат: $V_{max} = 0{,}31$ *м/с*.

Задача 8-7

Мотоцикл едет по горизонтальной дороге, делая поворот радиусом кривизны $R = 100$ *м*.

1) На какой угол α к вертикали он должен наклониться, чтобы не упасть на повороте, если его скорость $v = 74$ *км/час* (20.55 *м/с*)?

2) С какой максимальной скоростью v_{max} может ехать мотоцикл, если коэффициент трения скольжения между шинами и дорогой $\mu = 0{,}6$?

3) Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения мотоцикла, если он будет ехать по наклонному треку с углом наклона $\beta = 30^\circ$ по сравнению с допустимой скоростью движения по горизонтальной дороге при одинаковом радиусе закругления и одинаковом коэффициенте трения.

Решение задачи 8-7

1) При движении по дуге окружности на мотоцикл действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}$ (Рис.8-11). При этом, мотоцикл должен быть наклонён под углом α к вертикали в сторону центра закругления. Поскольку точка А колеса не скользит по поверхности, сила $\vec{F}$ является силой трения покоя. В зависимости от угла α она может принимать значения $0 \le F \le \mu N$, где μ - коэффициент трения скольжения шины о дорогу.

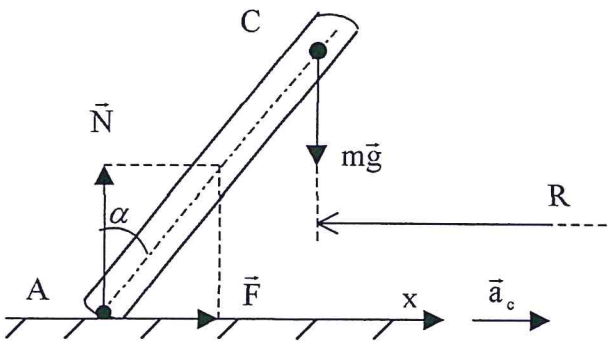


Рис. 8-11. Движение мотоцикла по кругу радиуса R в момент, когда вектор скорости $\vec{v}$, направленный перпендикулярно плоскости рисунка.

$m\vec{g}$ - сила тяжести мотоцикла с мотоциклистом.

$\vec{N}$ - нормальная реакция.

$\vec{F}$ - сила трения покоя.

$\vec{a}_c$ - центростремительное ускорение.

C – центр масс.

Условием неизменности угла α при движении по окружности является равенство нулю моментов сил относительно центра масс:

$$N \cdot d \cdot \mathrm{Sin}\alpha - F \cdot d \cdot \mathrm{Cos}\alpha = 0$$

где d – расстояние от точки касания колеса до центра масс. Откуда:

$$\frac{F}{N} = \mathrm{tg}\alpha \qquad (1)$$

Из (1) следует условие неизменности угла α при движении по окружности: равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}$ должна проходить через центр масс.

Из второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси следует:

$$\begin{cases} ma_c = F \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

где $a_c = \frac{v^2}{R}$.

Отсюда $F = \frac{mv^2}{R}$; $N = mg$.

Подставляя в (1), получим

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR} \qquad (2)$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{v^2}{gR} \cong 23^\circ$$

2) Из полученного выражения (2) для угла наклона следует, что при движении по окружности фиксированного радиуса R, каждому значению скорости v соответствует определённый угол наклона α. Этот угол наклона такой, чтобы сила трения $\vec{F}$ обеспечила необходимое центростремительное ускорение:

$$F = \frac{mv^2}{R} = m \cdot g \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

При максимальном угле наклона мотоцикла $\alpha = \alpha_{max}$ сила трения покоя также достигает максимальной величины $F = \mu \cdot N = \mu \cdot mg$. Подставляя в (1), получим

$$\mathrm{tg}\alpha_{max} = \mu \qquad (3)$$

Из выражения (2) найдём максимальную скорость движения мотоцикла:

$$\mathrm{tg}\alpha_{max} = \frac{m \cdot v_{max}^2}{R}$$

Откуда, учтя (3), получим:

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R} \qquad (4)$$

Подставляя числовые значения: $V_{max} = 24{,}3$ *м/с*. (87 *км/час*).

Попытка проехать то же закругление с большей скоростью, превысив угол наклона α_{max}, приведёт к падению мотоцикла, т.к. точка А колеса будет скользить вдоль радиуса от центра.

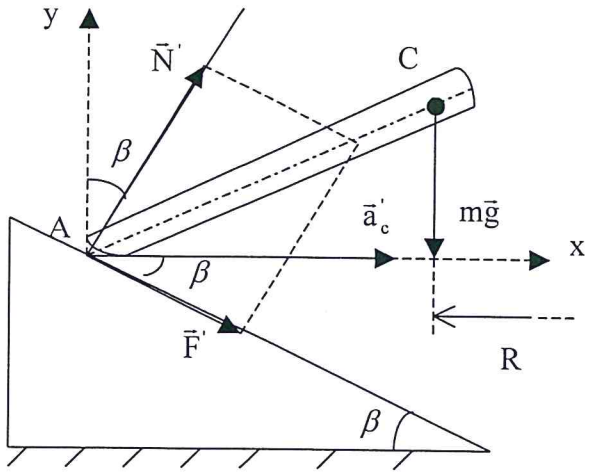


Рис. 8-12. Движение мотоцикла по треку с углом наклона β.

Показан момент времени, когда вектор $\vec{v}'$ перпендикулярен плоскости рисунка.

3) Рассмотрим движение мотоцикла на наклонном треке с углом наклона β (Рис.8-12). Здесь $m\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{F}'$ - сила трения покоя, $\vec{N}'$ - сила нормальной реакции, $\vec{a}_c'$ - центростремительное ускорение при движении со скоростью $\vec{v}'$ по кругу радиуса R.

Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} ma_c' = \dfrac{m(v')^2}{R} = F'\mathrm{Cos}\beta + N'\mathrm{Sin}\beta \\ 0 = N'\mathrm{Cos}\beta - F'\mathrm{Sin}\beta - mg \end{cases} \qquad (5)$$

Чтобы найти величину максимальной скорости мотоцикла на наклонном треке , v_{max}', при прежних значениях R и μ, надо учесть, что максимальное значение силы трения

$$F' = \mu N'$$

$$N' = \frac{mg}{\mathrm{Cos}\beta - \mu\mathrm{Sin}\beta} \qquad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) имеем:

$$\frac{m\left(v_{max}'\right)^2}{R} = \mu N'\mathrm{Cos}\beta + N'\mathrm{Sin}\beta = N'\left(\mu\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Sin}\beta\right) = \frac{mg\left(\mu\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Sin}\beta\right)}{\mathrm{Cos}\beta - \mu\mathrm{Sin}\beta}$$

Отсюда:

$$v_{max}' = \sqrt{gR\frac{\mu + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mu\mathrm{tg}\beta}} \qquad (7)$$

Учтя (4), окончательно найдём:

$$\frac{v_{max}'}{v_{max}} = \sqrt{\frac{\mu + \mathrm{tg}\beta}{\mu\left(1 - \mu\mathrm{tg}\beta\right)}}$$

Числовое значение: $\dfrac{v_{max}'}{v_{max}} = 1{,}74$.

Задача 8-8

Тело массой m = 0,1 *кг* соскальзывает без трения по наклонному жёлобу, переходящему в "мёртвую" петлю радиусом R = 0,2 *м* (Рис. 8-13). Начальная скорость $v_0 = 0$.

1) Найти силу нормального давления $\vec{N}'$ тела на петлю в точке B, если оно спускается с высоты H = 1 *м*. Радиус, проведённый из центра петли в точку B, составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Найти скорость тела в точке B.

2) С какой минимальной высоты H_0 должно начать двигаться тело, чтобы оно без отрыва прошло всю петлю?

3) Определить силу нормального давления и скорости тела в точках A, B, C, и D петли, если оно начало движение с высоты H_0, найденной в п. 2).

4) Найти высоту отрыва тела от петли, H_1, и его скорость при высоте начала движения H = 2R.

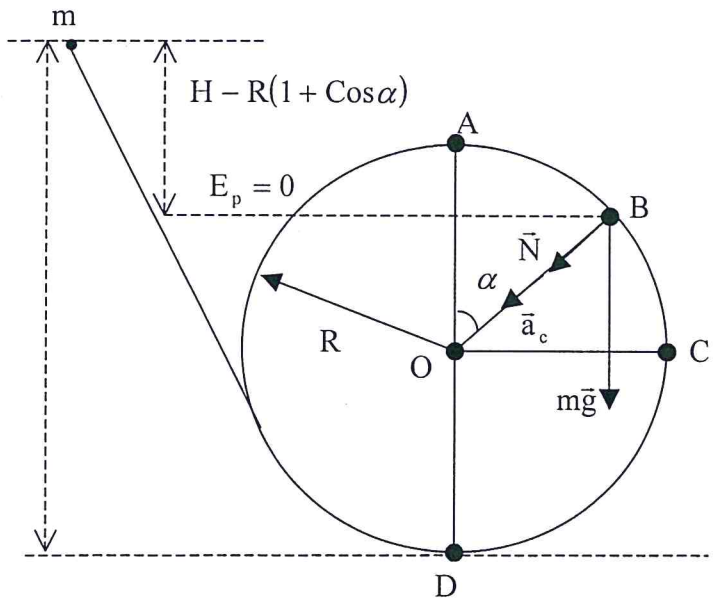


Рис. 8-13.
Сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции желоба $\vec{N}$, действующие на тело в момент прохождения точки B.
$\vec{a}_c$ - центростремительное ускорение
$E_p = 0$ - выбранный уровень нуля потенциальной энергии.

Решение задачи 8-8

1) Напишем закон сохранения механической энергии системы тело – Земля, учитывая, что система консервативная и изолированная, т.к. внешняя сила $\vec{N}$ не совершает работу при движении тела:

$$mg[H - R(1 + \mathrm{Cos}\alpha)] = \frac{mv^2}{2} \qquad (1)$$

где v – скорость тела в точке B.

Ноль потенциальной энергии системы выбран на уровне точки B. Второй закон Ньютона для тела в момент прохождения точки B:

$$ma_c = \frac{mv^2}{R} = N + mgCos\alpha \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2) и учитывая, что искомая сила нормального давления на желоб $\vec{N}'$ равна по модулю силе нормальной реакции $\vec{N}$, т.к. они связаны третьим законом Ньютона, получим:

$$N = N' = mg\left(\frac{2H}{R} - 2 - 3Cos\alpha\right) \qquad (3)$$

$$v = \sqrt{2g[H - R(1 + Cos\alpha)]} \qquad (4)$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$N' = 5{,}3\ H$$
$$v = 3{,}5\ м/с$$

2) Из выражения (3) следует, что сила нормального давления N' будет наименьшей в точке A $(\alpha = 0)$. Поэтому, если в точке A петли сила нормального давления N'_A будет равна нулю, то тело нигде не оторвётся от петли, поскольку в других точках петли $N' > 0$. Найдём из выражения (3), с какой высоты H_0 должно начать двигаться тело, чтобы в точке A петли сила нормального давления N'_A оказалась равной нулю. Это будет искомая минимальная высота начала движения тела, при которой оно проходит мёртвую петлю без отрыва.
Подставляя $N' = N'_A = 0$ и $\alpha = 0$, в выражение (3) получим значение H_0:

$$0 = mg\left(\frac{2H_0}{R} - 5\right);$$
$$H_0 = 5/2R = 0{,}5\ м$$

3) Для нахождения силы нормального давления тела на петлю и скорости тела в точках A, B, C и D, необходимо подставить в выражения (3) и (4) $H = H_0 = \frac{5}{2}R$ и соответствующий угол α. Результаты подсчётов сведены в Таблице 8-3.
Полученные результаты показывают, что сила нормального давления тела и его скорость уменьшаются с уменьшением угла α и достигают минимальных значений в точке A.

Таблица 8-3.

Значения силы нормального давления N' и скорости тела v в точках петли, обозначенных на рисунке 8-13. Высота начала движения тела $H_0 = 5/2R = 0{,}5$м

Обозначение. точки петли	α	N'		v	
	(градусы)	Формула	Числовые значения (*ньютоны*)	Формула	Числовые значения (*м/с*)
A	0		0	$\sqrt{mg}$	1,4
B	30	$3mg\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0,4	$\sqrt{mg\left(3-\sqrt{3}\right)}$	1,6
C	90	3mg	2,4	$\sqrt{3mg}$	2,4
D	180	6mg	5,9	$\sqrt{5mg}$	3,1

4) Если тело отпустили без начальной скорости с высоты H = 2R, то угол отрыва α_1 можно найти из (3), положив $N' = 0$ и H = 2R:

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}$$

Высота отрыва $H_1 = R + R\mathrm{Cos}\alpha_1 = \frac{5}{3}R$. $H_1 = 0{,}33$м.

Скорость тела при отрыве найдём из (4):

$$v_1 = \sqrt{2g\left[2R - R\left(1+\mathrm{Cos}\alpha_1\right)\right]} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}\,;\, v_1 = 1{,}14\,\frac{м}{с}.$$

9. СТАТИКА

Статика – раздел механики, изучающий условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.
Статика использует такие понятия как сила, пара сил, момент силы относительно точки, момент силы относительно оси.
Напомним, что силой в механике называется мера механического действия на данное тело других тел. Сила – величина векторная, которая характеризуется модулем, направлением и точкой приложения. Прямая линия, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Если тело рассматривается как абсолютно твёрдое (недеформируемое под действием сил), то любую из сил, на него действующих, можно считать приложенной к любой точке на её линии действия.

Парой сил называется система двух сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, приложенных к твёрдому телу и взаимно противоположных по направлению, т.е. $\vec{F} = -\vec{F}'$. Пара сил не имеет равнодействующей. Действие, оказываемое парой сил на твёрдое тело, характеризуется её моментом.

Момент пары сил – величина векторная, равная по модулю

$$M = F \cdot L \qquad (9.1)$$

где F – модуль одной из сил пары, L - плечо пары, т.е. расстояние между линиями действия сил пары. Момент пары $\vec{M}$ направлен перпендикулярно к плоскости действия пары в сторону, откуда поворот, совершаемый парой, виден происходящим против часовой стрелки. Основное свойство пары сил состоит в том, что действие её на твёрдое тело не изменяется при переносе пары в любом направлении в плоскости пары.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O (Рис. 9.1) называется вектор, модуль которого

$$M_0 = F \cdot h \qquad (9.2)$$

где F – модуль силы, h – плечо силы, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы.
Направлен вектор $\vec{M}_0$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат точка O и вектор $\vec{F}$, в сторону, откуда поворот, вызываемый силой, виден против часовой стрелки.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой оси z (Рис.9-1), M_z, называется скалярная величина, равная проекции на эту ось момента $\vec{M}_0$ силы $\vec{F}$ относительно точки O, принадлежащей указанной оси.

$$M_z = M_0 \cdot \mathrm{Cos}\gamma \qquad (9.3)$$

Другое определение, равноценное первому: M_z численно равен произведению проекции F_{xy} силы $\vec{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z, на длину перпендикуляра h_1, проведённого из точки O на направление F_{xy}.

$$M_z = F_{xy} \cdot h_1 \qquad (9.4)$$

Правило знаков: M_z имеет знак плюс, когда поворот силы $\vec{F}$ виден против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z.

Общий случай равновесия твёрдого тела: для равновесия твёрдого тела, находящегося под действием сил, произвольно расположенных в пространстве, необходимо и достаточно обращения в нуль векторной суммы всех сил и векторной суммы моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки.

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_0 = \vec{0} \end{cases} \qquad (9.5)$$

В скалярной форме условия равновесия, эквивалентные системе (9.5), выразятся шестью уравнениями равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = \sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0 \\ \sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \end{cases} \qquad (9.6)$$

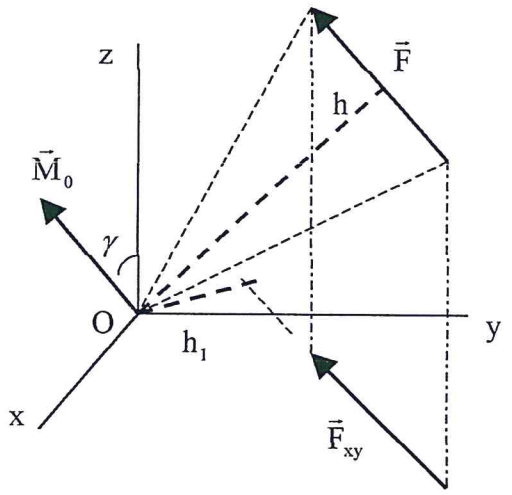


Рис. 9-1.
К вопросу об определении момента сил.

На практике широко распространён случай, когда на твёрдое тело действуют силы, произвольно расположенные в одной плоскости (плоская система сил). Если выбрать координатные оси и точку O, относительно которой берутся моменты, в плоскости действия сил, то векторы моментов всех сил будут перпендикулярны плоскости действия сил. В этом частном случае условия равновесия сводятся к трём скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} \qquad (9.7)$$

Для равновесия твёрдого тела, находящегося под действием плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на две взаимно-перпендикулярные оси были бы равны нулю. Так же должна быть равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил относительно точки O, произвольно расположенной в плоскости действия сил.

В уравнении моментов системы (9.7) каждый из моментов равен модулю соответствующей силы, умноженному на расстояние от выбранной точки O до линии действия этой силы. При этом моменты, стремящиеся совершить поворот по часовой

стрелке, имеют один знак, против часовой стрелки – противоположный знак. Следует отметить, что возможны случаи, когда система (9.7) содержит одно уравнение проекций сил на ось, расположенную в плоскости действия сил, и два уравнения моментов относительно двух произвольно выбранных точек в плоскости действия сил. Система (9.7) может также содержать три уравнения моментов относительно трёх различных точек на плоскости действия сил.

В практике так же имеет распространение случай, когда линии действия всех приложенных к телу сил пересекаются в одной точке. В этом случае тело рассматривается как материальная точка и условия равновесия для пространственного расположения сил таковы: алгебраические суммы проекций всех сил на три взаимно-противоположные оси равны нулю:

$$\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0 \qquad (9.8)$$

Необходимые и достаточные условия равновесия для плоской системы сходящихся в одной точке сил сводятся к двум уравнениям

$$\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = 0 \qquad (9.9)$$

Задачи к разделу 9 и их решения

Задача 9-1

Брусок соскальзывает с наклонной плоскости с трением. Угол наклона плоскости составляет 30°. Определить зависимость коэффициента трения от угла наклона в общем виде, а также значение μ для угла 30°.

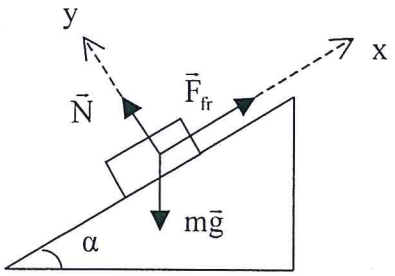


Рис.9-2. Силы, действующие на брусок.

Решение задачи 9-1

Т.к. брусок движется поступательно (каждая его точка совершает одинаковое движение), его можно считать материальной точкой, в которой пересекаются все действующие на него силы.

На брусок действуют сила нормального давления (сила упругости) $\vec{N}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения $\vec{F}_{fr}$ (Рис.9-2). На плоскость со стороны бруска действует сила трения $\vec{F}'_{fr}$ и сила упругости $\vec{N}'$ (вес бруска)

Пользуясь третьим законом Ньютона можно записать:

$$\vec{N} = -\vec{N}'; \vec{F}_{fr} = -\vec{F}'_{fr}; m\vec{g} = -m\vec{g}'$$

$$|N| = |N'|; |F_{fr}| = |F'_{fr}|; |mg| = |mg'|$$

Следует указать, что сила, противодействующая силе тяжести приложена к центру Земли. Запишем условия равновесия бруска(материальной точки) в векторной форме:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{fr} = 0$$

В проекции на оси координат условия равновесия можно выразить системой двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x|\mu N - mg\mathrm{Sin}\alpha = 0 \\ y|N - mg\mathrm{Cos}\alpha = 0 \end{array}\right\}$$

Решая систему уравнений методом подстановки, получим:

$$N = mg\mathrm{Cos}\alpha$$

$$\mu \cdot mg \cdot \mathrm{Cos}\alpha = mg \cdot \mathrm{Sin}\alpha$$

$$\mu = \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

Подставим значение α=30° в полученное нами в общем виде выражение

$$\mu = \mathrm{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1{,}73}{3} = 0{,}576$$

Коэффициент трения при угле наклона плоскости 30° равен 0,576.

Использованная литература

1. Хайкин С. Э. Физичекие основы механики. М.: "Наука", 1971 г.
2. Зубов В. Г. Механика. М.: "Наука", 1978 г.
3. Шаскальская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. М.: "Наука", 1969 г.
4. Рымкевич А. П. Сборник задач по физике. М.: "Просвещение", 1986 г.
5. Баканина Л. П., Белокучкин В. Е., Козел С. М., Колачевский Н. Н., Косоуров Г. И., Мазанько И. П. Сборник задач по физике. М.: "Наука", 1971 г.
6. Гольдфарб Н. И. Сборник вопросов и задач по физике. М.: "Высшая школа", 1973 г.
7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1 и 2. М.: "Мир", 1967 г.
8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения. М.: "Мир", 1967 г.
9. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. М.: "Мир", 1969 г.
10. Физический энциклопедический словарь. М.: "Советская энциклопедия", 1984 г.
11. Журналы "Квант". М.: "Наука".

Предназначено для учащихся, знакомых с основами физики в рамках обычной школьной программы и владеющих необходимым математическим аппаратом. Книга рассчитана на школьников, желающих углубить и расширить свои знания в области классической механики, студентов первых курсов высших учебных заведений, а также преподавателей старших классов общеобразовательных и специальных школ.