Городской интеллектуальный конкурс 2020.

5 класс

1) Упростите: $\dfrac{2020-2019+2018-2017+\cdots+2-1}{2020\cdot 36+64\cdot 2020}$.

Решение: Заметим, что $2020-2019=2018-2017=2016-2015=\cdots=4-3=2-1=1$. Таких пар получается 2020:2=1010. Вычисление количества получившихся пар разностей должно быть приведено!

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1010\ штук}=1010$$

Отсюда получаем $\frac{2020-2019+2018-2017+\cdots+2-1}{2020\cdot 36+64\cdot 2020}=\frac{1010}{2020\cdot 100}=\frac{1}{200}=0{,}005.$

2) На столе лежат две кучки спичек: в одной 15 штук, во второй 20. Играют двое, забирая спички по очереди. за ход можно брать любое количество спичек из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может взять спичек, так как все уже разобрали (другими словами, выигрывает тот, кто забрал последние спички). Кто победит в этой игре - игрок, делающий первый ход или второй?

Решение: В данной игре выигрывает первый игрок. Для победы ему нужно каждый раз уравнивать кучки, то есть первым ходом взять из второй кучки 5 спичек, а дальше брать столько же спичек, сколько берет второй, только из противоположной кучки.

3) Имеется бидон объемом 12 литров, полностью заполненный молоком, а также два пустых бидона по 8 и 5 литров. Как разделить 12 литров молока на две равные части?

Решение:

Тип бидона / № переливания	12 литров	8 литров	5 литров
начальный момент	12	0	0
1) перелили из 1 во 2	4	8	0
2)перелили из 2 в 3	4	3	5
3) перелили из 3 в 1	9	3	0
4) перелили из 2 в 3	9	0	3
5) перелили из 1 во 2	1	8	3
6) перелили из 2 в 3	1	6	5
7) перелили из 3 в 1	6	6	0

4) Константин завёл в начале года блокнот и пронумеровал все страницы в порядке возрастания от 1 до 200 (всего 100 листов в блокноте). В течение года из блокнота было вырвано 17 листов. Может и так получится, что сумма номеров оставшихся страниц равна 2020?

Решение: Заметим, что вырывая один листок, вырывается две последовательные страницы. Сумма любых двух последовательных чисел будет нечетной, так как одно из чисел четно, а другое нечетно. Так как в течение года было вырвано 17 листов, то осталось 83 листа, что является нечетным числом. Сумма нечетного количества нечетных чисел является нечетным числом. А значит, сумма номеров оставшихся страниц не может равняться 2020.

Возможен и другой вариант решения задачи. Например, можно подсчитать сумму номеров 17 последних листов блокнота (наибольшая сумма). Далее найти сумму оставшихся номеров (она будет тогда наименьшей из возможных сумм). Она окажется больше 2020, а значит, при вырывании других листов, будет получаться еще больше, таким образом, сумма номеров оставшихся страниц не может быть равной 2020.

5) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова :
а) "ТОЧКА";
б) "ЛИНИЯ"? (Словом является любая последовательность букв)

Решение: а) Заметим, что у нас пять различных букв. Таким образом, когда мы расставляем буквы по местам, то получим следующую цепочку: на первую позицию мы можем поставить любую из 5 букв, на вторую позицию любую из оставшихся 4, на третью - 3, на четвертую - 2, на пятую - 1. То есть суммарное количество различных слов будет равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

б) В записи слова ЛИНИЯ присутствует две буквы И, если бы мы считали, что все буквы различны, то получили бы такой же ответ как в предыдущем номере. Двойное повторение одной из букв дает нам двойное повторение одного и того же слова. Допустим, буква И имела бы номер, тогда ЛИ$_1$НИ$_2$Я и ЛИ$_2$НИ$_1$Я были бы двумя различными словами, но поскольку буква И одна, то такие пары слов будут одинаковыми, поэтому количество слов из пункта (а) нужно уменьшить вдвое, и это будет ответом в данном пункте. 120:2=60.

6 класс

1) На столе лежит 36 спичек. Двое, по очереди, забирают 1,2,3 или 4 спички. Проигрывает тот, кто не может взять спичек (другими словами, выигрывает тот, кто забрал последние спички). Кто победит в этой игре - игрок, делающий первый ход или второй?

Решение: В данной игре побеждает первый игрок. Для этого ему нужно первым ходом забрать 1 спичку, останется 35 спичек и каждым своим ходом, первый должен дополнять количество спичек, взятых вторым, до 5. Таким образом, количество спичек, после хода второго и первого игрока будут сокращаться на 5.

$$35 \to 30 \to 25 \to 20 \to 15 \to 10 \to 5 \to 0.$$

Когда спичек останется на столе 5 штук, право хода будет за вторым игроком, и сколько бы спичек он не взял, первый заберет все оставшиеся и победит.

2) Яблоко разрешается разрезать не более чем на 4 части. Можно ли разделить поровну 21 яблоко между 36 школьниками? Объясните свой ответ.

Решение: Да, можно. 12 яблок нужно разрезать на три равные части, как раз получится 36 равных долек, а оставшиеся 9 яблок на четыре равные части и получить также 36 равных долек. Таким образом, любому из 36 школьников достанется одна долька размером с треть яблока и одна долька размером с четверть.

Примечание:
Задача простая и найти ответ в ней несложно, но от участника, в первую очередь, требуется пояснение своим действиям, чтобы жюри не приходилось додумывать решение.

3) К общей сети подключено 256 компьютеров, все они пронумерованы от 1 до 256. Системный администратор, с помощью соответствующих программ, проверяет работоспособность всей сети. Сначала запускается первый тест на всех компьютерах, затем второй тест на - на всех компьютерах чьи номера кратны двум, третий тест - на всех компьютерах чьи номера кратны трем , и так далее до 256 (последний 256-ой тест проверяет компьютеры с номером кратным 256). Определите, компьютеры с какими номерами пройдут нечетное количество тестов. В ответе запишите эти номера в порядке возрастания.

Решение: Заметим, что запуская таким образом тесты, мы переберем все возможные делители каждого из чисел, и количество тестов, запущенных на одном компьютере, равно количеству делителей номера этого компьютера. К примеру, на компьютере с номером 18 будут запущены тесты:1, 2,3, 6, 9, 18, то есть все тесты которые являются делителями числа 18, и их будет ровно шесть штук, то есть четное количество. По условию задачи, нужно определить компьютеры с какими номерами пройдут нечетное количество тестов, то есть другими словами, какие из номеров будут иметь нечетное количество делителей. Очевидно, что если $a \vdots b = c$, то $a \vdots c = b$. Таким образом, если у числа a есть делитель b, то у него есть и делитель c, получаем связанную пару. Возвращаясь к примеру с числом 18, видим, что имеется 3 связанные пары 1 и 18, 2 и 9, 3 и 6. Заметим, что нечетное количество делителей можно получить тогда, когда мы не сможем разбить число только на связанные пары. Такое возможно только в одном случае, когда в связанной паре два одинаковых числа, то есть $b = c$ и $a \vdots b = b$ или другими словами, когда число является полным квадратом. К примеру 16 будет иметь пять делителей 1,2,4,8,16, так как для 4 сопряженной будет она сама. Теперь мы можем ответить на поставленный в задаче вопрос: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256 - номера компьютеров прошедших нечетное количество тестов.

Ответ: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256

4) Автомобилист, выезжая из города А в город В, проехал два контрольных пункта, которые разделяют весь путь от А до В на три равных части. Первая часть была пройдена со скоростью 60 км/ч, вторая - со скоростью 84 км/ч, а третья - со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость на всём пути движения от города А до города В.

Решение: Средняя скорость на всем пути движения равна отношению пройденного пути к потраченному времени. Обозначим весь путь S, тогда время, которое потратят на первую треть равно $\frac{S}{180}$, на вторую $\frac{S}{252}$ и на третью $\frac{S}{210}$. Значит на весь путь потратят

$$\frac{S}{180} + \frac{S}{252} + \frac{S}{210} = \frac{S}{70}$$

Отсюда, уже несложно заметить, что средняя скорость на всем пути $\frac{S}{\frac{S}{70}} = 70$.

Ответ: 70км/ч

5) На доске написано девять различных натуральных чисел. Отличник Петя утверждает, что если выписать всевозможные попарные разности, то среди них будет три одинаковых. Прав ли Петя, если принять во внимание, что все числа не превосходят 19?

Решение: Заметим, что результаты разности натуральных чисел, не превосходящих 19 , - это целые числа в диапазоне от -18 до -1 и от 1 до 18, то есть всего 36 различных результатов - которые мы назовем "клетки". Из 9 чисел можно составить $9 \cdot 8 = 72$ различных попарных разности - эти 72 попарные разности будем называть "кроликами". Казалось бы, 72 кролика можно рассадить по 36 клеткам ровно по две штуки, но здесь стоит заметить, что разности 18 и -18 можно получить только один способом 19-1 и 1-19, а значит в клетках с номерами 18 и -18 будет сидеть только по одному кролику. Остается рассадить 70 кроликов в 34 клетки. Отсюда, по принципу Дирихле получаем, что хотя бы в одной клетке будет сидеть как минимум 3 кролика, а значит Петя прав, что среди всевозможных попарных разностей будут три одинаковые.

7 класс

1) Найдите остаток от деления 2021^{2019}: 2020.

Решение: Заметим, что $2021^{2019} = (1 + 2020) \cdot 2021^{2018} = 2021^{2018} + 2020 \cdot 2021^{2018}$. Очевидно, что $2020 \cdot 2021^{2018}$ делится на 2020 без остатка, а 2021^{2018} можно дальше раскладывать по той же схеме, то есть $2021^{2018} = 2021^{2017} + 2020 \cdot 2021^{2017} = 2021^{2016} + 2020 \cdot 2021^{2016} + 2020 \cdot 2021^{2017} = \cdots$. В конце у нас останется просто 2021 и сумма чисел кратных 2020. Отсюда получаем, что остаток от деления данного числа на 2020 будет равен остатку от деления 2021 на 2020, то есть 1.
Ответ: 1

2) Найдите наибольшее значение выражения $-2x^2 + 12x - 20$.

Решение: Преобразуем данное выражение

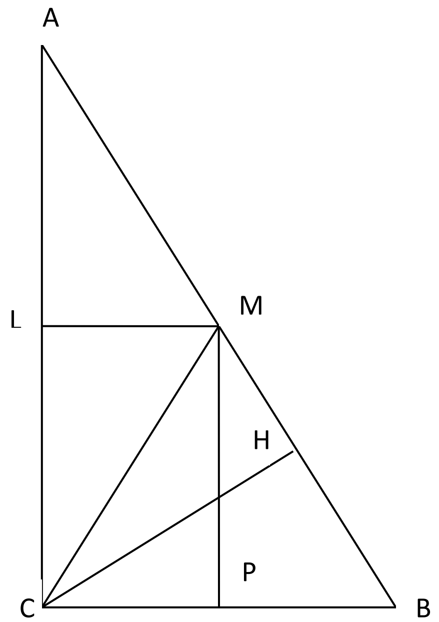
$$-2x^2 + 12x - 20 = -2(x^2 - 6x + 10) = -2(x^2 - 6x + 9 + 1) = -2((x-3)^2 + 1).$$

$$0 \leq (x-3)^2 \Rightarrow 1 \leq (x-3)^2 + 1 \Rightarrow -2((x-3)^2 + 1) \leq -2\,.$$

Отсюда несложно заметить, что наибольшее значение выражения равно -2.
Ответ: -2.

3) Известно, что один из углов прямоугольного треугольника равен $25°$. Найдите угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла.

Решение: Проведем из точки М отрезки ML и MP, параллельные соответственно BC и AC. Треугольники LAM и PMB равны по стороне и двум прилежащим углам ($\angle LAM = \angle PMB$, $\angle LMA = \angle PBM$ как соответственные, AM=MB). Аналогично равны треугольники MPC и CLM, откуда LM=CP, а значит CP=PB. Из этого мы получаем, что MP является и медианой и высотой в треугольнике CMB, а это значит, что треугольник CMB равнобедренный и CM=MB=AM. $\angle CAM = \angle ACM = 25°$, так как треугольник AMC равнобедренный. $\angle MCB = \angle MBC = 90° - 25° = 65°$, так как треугольник CMB равнобедренный.



CH - высота, а значит треугольник CHB прямоугольный и $\angle B = 65°$, откуда $\angle HCB = 25°$, а значит угол между медианой и высотой будет равен $65° - 25° = 40°$.
Ответ: 40°

4) На столе лежит 36 спичек. Двое, по очереди, забирают 1,2 или 4 спички. Проигрывает тот, кто не может взять спичек (другими словами, выигрывает тот, кто забрал последние спички). Кто победит в этой игре - игрок, делающий первый ход или второй?

Решение: В данной игре победит второй. Рассмотрим решение с конца.
1) Допустим к нашему ходу не осталось спичек – значит, мы проиграли.
2) Если к нашему ходу останется 1 или 2 спички - мы выиграли, так как просто заберем их.
3) Если к нашему ходу осталось 3 спички, то мы проиграли, так как можем взять 1 или 2, тем самым передав инициативу противнику.
4) Если осталось 4, то возьмем 1 спичку и противнику останется 3, значит он проиграет, а мы победим.
5) Если осталось 5, то возьмем 2 спички, и опять выиграем.
6) Если осталось 6, то мы проиграли, так как можем перейти только к 5,4 или 2 спичкам, передав инициативу противнику.
7) Если спичек 7, то аналогично пункту 4) возьмем 1 спичку.
8) Если 8, то аналогично пункту 5) возьмем 2 спички.
9) Если 9 спичек, то мы проиграли, так как можем перейти к 8,7 или 5 спичкам, передав инициативу противнику.
Несложно заметить, что если мы оказались в позиции, когда нужно брать из кучки кратной трем, то мы проиграли. Поскольку спичек изначально 36, то проиграет первый, для этого второму достаточно после каждого своего хода оставлять в кучке количество спичек кратное трем.

5) Про натуральные числа a и b известно, что a^b - имеет пять натуральных делителей, а b^a - семь натуральных делителей. Сколько натуральных делителей будет иметь произведение $a \cdot b$?
Решение: Допустим, что a - простое число, тогда вполне очевидно, что $b = 4$, и у числа a^4 будет ровно 5 делителей: $1, a, a^2, a^3, a^4$. Тогда 4^a должно иметь семь натуральных делителей. Заметим, что $4^a = 2^{2a}$, и основание, вновь, простое число, следовательно для того чтобы было семь натуральный делителей степень двойки должна быть равна шести, то есть $2a = 6 \Rightarrow a = 3$. При этом мы получили простое a, удовлетворяющее нашему предположению. Отсюда $a \cdot b = 3 \cdot 4 = 12$ и число 12 имеет шесть различных натуральных делителей (1,2,3,4,6,12).
Покажем, что число a не может быть составным. Пусть, число a составное и представимо в виде произведения, хотя бы двух простых сомножителей, то есть $a = m \cdot n$. Но тогда при возведении числа a, хотя бы во вторую степень мы будем получать, что $a^2 = m^2 \cdot n^2$, и это число имеет уже девять натуральных делителей $(1, m, n, mn, m^2, n^2, mn^2, m^2n, m^2n^2)$, что противоречит условию задачи. Значит, число a не может быть составным.
Ответ: 6 делителей.