

## 5 класс

- 1) Первый обменный пункт меняет рубли на доллары по 60 рублей за доллар и еще берет 140 рублей за право обмена независимо от меняемой суммы. Вторым обменным пунктом за доллар берут 60 рублей 40 копеек, а за право обмена берут 1 доллар независимо от меняемой суммы. Турист установил, что ему все равно, в каком из банков менять деньги. Какую сумму он собирается менять?

**Решение:**

*Пусть у туриста изначально было  $S$  рублей. Тогда в первом обменном пункте, с учетом комиссии он получит  $(S-140)/60$  долларов, а во втором  $(S/60.4)-1$  долларов. Так как в задаче сказано, что туристу все равно где менять деньги, то это равнозначно условию:  $(S-140)/60=(S-60.4)/60.4$ . Отсюда находим  $S$ .  $S=12080$  рублей.*

- 2) В трех мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа» на другом – «вермишель», на третьем – «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует надписи?

**Решение:** *Поскольку на третьем мешке написано «крупа или сахар», а содержимое каждого не соответствует надписи, то в мешке вермишель. Остались сахар и крупа. В мешке с надписью крупа-не крупа, значит там сахар и соответственно в мешке с надписью вермишель-сахар.*

- 3) Из числа 123456789101112...9899100, образованного путем последовательного приписывания друг за другом всех чисел от 1 до 100, вычеркните 100 таких цифр, чтобы оставшееся число было наибольшим. Опишите принцип по которому будут вычеркиваться цифры. Также напишите первые 10 и последние 5 цифр, полученного числа.

**Решение:** *Очевидно, что после вычеркивания 100 цифр, число будет наибольшим, если на месте старших разрядов будут стоять девятки. В связи с этим вычеркиваем первые восемь цифр, затем цифры чисел от 10 до 18 и единицу у 19 и так далее до цифры 4 у числа 49. Таким образом, было вычеркнуто  $8+19+19+19+19=84$  цифры. Осталось вычеркнуть еще 16 цифр, а именно цифры чисел 50,51,52...56 (14 цифр) и дважды цифру 5 у чисел 57 и 58. Всего, таким образом вычеркнули 100 цифр.*

*Первые десять и последние пять цифр числа: 9999978596...99100*

- 4) Неточные весы показывают вес, который может отличаться от настоящего, но не больше чем на 0,5кг ( при разных взвешиваниях отклонение показаний весов от истинного веса могут быть разными!) Петя взвесил на них свой портфель. Весы показали 5кг. Портфель Васи потянул на 4 кг. А когда Петя с Васей положили на весы оба портфеля, они показали 10,5 кг. Сколько весит каждый из портфелей на самом деле? Ответ обоснуйте

**Решение:** *Первое взвешивание показывает, что Петин портфель весит не больше чем 5,5кг, второе - что Васин портфель весит не больше чем 4,5 кг. Поэтому вместе эти два портфеля весят не больше 10 кг. Но третье взвешивание показывает, что вместе эти два портфеля весят не меньше чем 10кг. Поэтому вместе они весят ровно 10 кг, а это возможно, только если портфель Пети весит ровно 5,5 кг, а портфель Васи - ровно 4,5 кг.*

5) Мама купила в магазине апельсины и яблоки, и раздала их своим сыновьям, причем каждому досталось поровну фруктов. Васе досталась третья часть всех апельсинов и пятая часть всех яблок.

а) Сколько сыновей у мамы?

б) Какое минимальное количество фруктов, исходя из условия задачи, должна была купить мама, чтобы каждому досталось целое количество яблок и апельсинов?

(Ответы обоснуйте)

**Решение:** *а) Если бы Васе досталась не пятая, а третья часть всех яблок, то он получил бы третью часть всех фруктов. Но это больше, чем он получил на самом деле. Значит, на самом деле доля каждого из сыновей составляет меньше третьей части всех фруктов. Поэтому сыновей больше трех. Однако если бы Васе досталась пятая часть всех апельсинов, он получил бы пятую часть всех фруктов. Но это меньше, чем он получил на самом деле. Поэтому сыновей меньше пяти. А если сыновей больше трех, но меньше пяти, то их четверо.*

*б) Очевидно, что минимальное количество фруктов может быть равно восьми ( три апельсина и 5 яблок). Тогда Васе достался 1 апельсин и 1 яблоко, оставшиеся 6 фруктов без труда можно поделить поровну еще на троих.*

## 6 класс

- 1) Садовод Василий Ефремович в магазине “Все для сада” отдал кассиру 100 рублей и сказал: “Дайте мне семян по 2 рубля, семян по 1 рублю в 10 раз больше, и на остальные деньги - семян по 5 рублей”. Как кассир магазина смог выполнить это довольно головоломное задание, если садовод получил ненулевое количество семян каждой цены?

**Решение:** *Обозначим количество семян по два рубля за  $x$ (шт) , тогда количество семян по рублю равно  $10x$ . Стоимость семян по два рубля и по одному рублю равна  $12x$ (р). По условию сказано, что садовод отдал 100 рублей и на оставшиеся деньги*

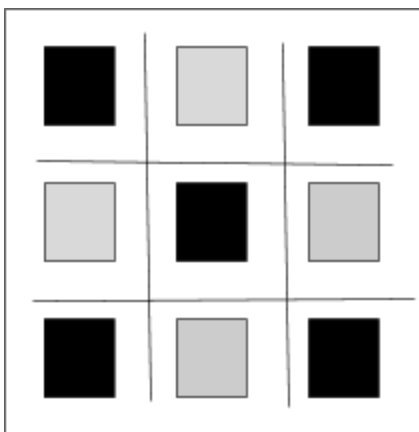
попросил семян по пять рублей. Отсюда делаем вывод, что  $100-12x$  нацело делится на 5. Так как 100 кратно 5, то  $12x$  также кратно, следовательно  $x=0$  или  $x=5$ . Но в условии сказано, что кассир выдал ненулевое количество семян каждого вида, значит садовод получил 5 семян по 2 рубля, 50 семян по 1 рублю и 8 семян по 5 рублей.

- 2) Восстановите ребус: КОШКА + КОШКА + КОШКА = СОБАКА. Одинаковыми буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным буквам – разные цифры.

**Решение:** Так как  $КА+КА+КА$  оканчивается на  $КА$ , то  $КА=50$ , а значит,  $К=5$ ,  $А=0$ . Так как  $Ш+Ш+Ш+1$  оканчивается на 0, то  $Ш=3$ . Так как сумма трех чисел, начинающихся на 5, может начинаться лишь с 1, то  $С=1$ . Рассматривая варианты для  $О$ , получаем, что  $О=6$ , а значит,  $Б=9$ . Итак, получаем:  
 $56350+56350+56350=169050$

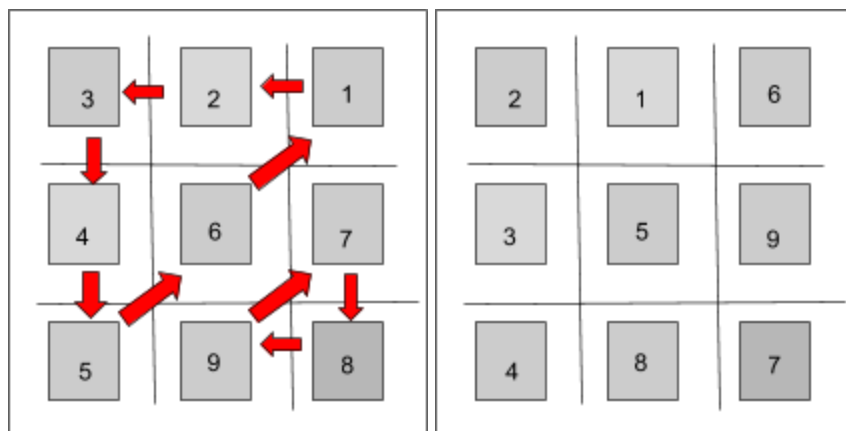
- 3) В гостинице имеющей форму квадрата, расположено 9 комнат одинаковых размеров, разделенных между собой коридорами.. Каждый из всех 9 постояльцев недоволен своей комнатой и считает, что любая комната через коридор лучше, чем та в которой он живет. Может ли хозяйка гостиницы переселить их так, чтобы каждый постоялец переехал в соседнюю комнату?
- а) Комнаты будут называться соседними, если на плане этажа одна от другой находится сверху, снизу, справа или слева.
- б) Комнаты будут называться соседними, если на плане этажа одна от другой находится сверху, снизу, справа, слева или по диагонали.

**Решение:** а) Не может.



При заданном условии соседних комнат, при переезде цвет комнаты должен поменяться, поэтому постояльцы живущие в пяти черных комнатах, должны переехать в белые комнаты, которых четыре. Такой обмен не возможен, поэтому переселить постояльцев не получится.

б) Да, может



При данном определении соседних комнат переселение возможно. Стрелками показан пример как могут переселиться постояльцы. После переселения получится вторая картинка.

- 4) Имеются туристические путевки трех типов, которые стоят соответственно 4, 6 и 9 условных единиц. Путевка первого типа рассчитана на 8 дней, второго – на 14, и третьего – на 20 дней отдыха. Сколько туристических путевок каждого типа можно купить на 100 условных единиц, чтобы общее число дней было наибольшим? ( Ответ обоснуйте)

**Решение:** За 36 условных единиц (далее уе) можно купить соответственно 9, 6 и 4 путевок разных типов, а отдохнуть соответственно 72, 84 и 80 дней, так что по “убыванию выгоды” типы путевок распределяются так: второй, третий, первый.

Поэтому вместо 3 путевок первого типа на те же 12 уе можно купить 2 путевки второго типа и увеличить тем самым число дней отдыха. Другими словами, в нужной покупке число путевок первого типа не больше 2. Точно так же на 18 уе можно купить 3 путевки второго типа или 2 путевки третьего типа, но этот вариант хуже, так что путевок третьего типа следует покупать не более одной. Но если купить одну, то на остальные путевки придется 91 уе, а это число нечетно, тогда как каждая из этих путевок стоит четное число уе, так что путевок третьего типа не следует покупать вообще. поэтому на 100 уе нужно как можно больше купить путевок второго типа, а поскольку их стоимость должна делиться на 6, то их надо купить 16, а на оставшиеся 4 уе - одну путевку первого типа.

- 5) На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2018 без пропусков и повторений: 1, 2, 3, ..., 2017, 2018. С выписанными на доске числами проделывают следующие операции: выбирают какие-либо два числа и записывают на доске модуль их разности, а сами выбранные числа стирают. Так продолжают до тех пор, пока на доске не останется только одно число. Какое наименьшее число и какое наибольшее число могут остаться на доске?

**Решение.** Не может получиться число большее 2018 и меньше 0. В исходном списке нечетное число нечетных чисел. При операции над двумя четными числами число нечетных не меняется, а при операциях над двумя нечетными или четным и нечетным - уменьшается на 2. Значит, последнее оставшееся на доске число будет нечетным. Опишем алгоритмы получения числа 1 и числа 2017.

- 1) Сгруппируем все числа по парам: 1 и 2, 3 и 4 и т.д., итого нечетное число пар. В каждой паре выполним операцию, получим нечетное число единиц. Применив к ним операцию, придем к 1.
- 2) Сгруппируем числа так: 1, 2 и 3, 4 и 5 и т.д., 2016 и 2017, 2018, итого четное число пар. Применив к парам операцию, всего получим нечетное число единиц, после операций над ними останется 1 и 2018. Применив к последней паре операцию, получим 2017.

## 7 класс

- 1) В классе 29 учеников. Петя Иванов сделал в диктанте 13 ошибок, остальные ученики меньше. Докажите, что в классе найдется по крайней мере 3 ученика, сделавших ошибок поровну.

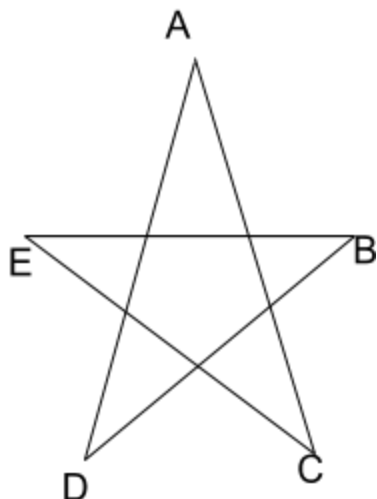
**Решение:** Поскольку возможно 14 вариантов (от 0 до 13 ошибок), а учеников  $29=14 \cdot 2 + 1$ , то по принципу Дирихле найдется 3 ученика сделавших одинаковое количество ошибок.

- 2) Делится ли число  $(7 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 2017 - 7)$  на 10?  
А число  $17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 2017 - 7$ ? (Ответ обоснуйте)

**Решение:** Число  $(7 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 2017 - 7)$  на 10 не делится, поскольку последней цифрой произведения  $7 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 2017$  будет цифра 9, так как в цикле произведения семерки будет 4 элемента 7,9,3,1, а наше произведение содержит 202 элемента.

Соответственно число  $17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 2017 - 7$  на 10 делится, так как последняя цифра числа  $17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 2017$  будет семерка.

- 3) У звезды ACEBD равны углы при вершинах A и B, углы при вершинах E и C, а также длины отрезков AC и BE. Докажите, что  $AD=BD$ .



**Решение:** Пусть точка  $O$  пересечения  $AC$  и  $BE$ . Тогда  $OE=CE$ , так как треугольник  $EOC$  равнобедренный. По условию  $AC=BE$ , значит  $OA=OB$  и отсюда равны углы  $OAB$  и  $OBA$ , а отсюда получаем, что углы  $DBA$  и  $DAB$  равны, следовательно, треугольник  $DAB$  - равнобедренный, откуда  $AD=BD$ . Чтд.

- 4) На плоскости дан угол, градусная мера которого от 90 до 120. Как проверить, используя только циркуль, равен ли этот угол  $108^\circ$ ?

**Решение:** Поскольку  $360^\circ \cdot 3 = 108^\circ \cdot 10$ , то получаем, что десять углов  $108^\circ$  должны составить три полных угла. Циркулем чертим окружность с центром в вершине данного угла. Окружность пересечет стороны угла в точках  $A$  и  $B$ . Углу  $108^\circ$  будет соответствовать дуга  $AB$ . Отложим на окружности эту дугу циркулем от точки  $B$  девять раз. Если после этого мы попадем в точку  $A$ , то данный угол будет равен  $108^\circ$ , а если не попадем - то не будет.

- 5) Дано 45 натуральных различных чисел, каждое из которых не превосходит 125. Доказать, что какие-то два из них отличаются на 4, 5 или 9.

**Решение:** Рассмотрим новые 45 чисел, которые получаются из исходных чисел прибавлением к каждому по 4. Если пересечение первоначального и вновь полученного множества содержит хотя бы один элемент, то в исходном множестве найдется пара чисел с разностью 4. Допустим, что такой пары нет. Тогда рассмотрим еще 45 чисел, которые получаются из второго набора прибавлением к каждому из чисел по 5. Если пересечение третьего множества с первым или вторым не является пустым, то найдется в первом множестве пара чисел, отличающихся друг от друга на 5 или 9. Если же пересечение будет пустым множеством в обоих случаях, то мы имеем 135 различных чисел, каждое из которых не превышает  $125+4+5=134$ , что невозможно. Значит, среди указанных чисел обязательно найдутся два, отличающиеся на 4, или на 5, или на 9.