Делимость. Свойства остатков

Квант-10. Математика

Михаил Хозин

ГРЦФМО, Лицей 40. г. Нижний Новгород

30 сентября 2018 г.

План занятия

1. Признаки делимости
   - Диагностические задачи
   - Основные признаки делимости
2. Натуральные делители
   - Количество натуральных делителей числа
   - Сумма натуральных делителей числа

Признаки делимости

Диагностические задачи

1. Число 134* кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки?
2. Делится ли число 314567891 на 11?
3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число 314159*6 кратно 8?
4. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе. Могла ли выручка составить 2505 рублей?
5. Сумма и произведение двух натуральных чисел кратны 136. Докажите, что квадрат каждого из них кратен 136.

Основные признаки делимости

Многие задачи могут быть решены с помощью признаков делимости нацело. Нам необходимо вспомнить основные признаки делимости: делимость на 2..13. Все эти признаки вам должны быть знакомы.

Признаки делимости на 3 и 9

Делится ли число 314567891 на 11?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Признаки делимости на 3 и 9

Делится ли число 314567891 на 11?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Признаки делимости на 3 и 9

Делится ли число 314567891 на 11?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Можем ли мы по аналогии сформулировать признак делимости на 27?

Признаки делимости на 3 и 9

Делится ли число 314567891 на 11?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Сумма первых трёх цифр равна 8. При добавлении * мы должны получить результат делящийся на 3, то есть 9, 12 или 15. Значит на месте * могут стоять только цифры 1, 4 или 7.

Признаки делимости на 11

Число 134* кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Признаки делимости на 11

Число 134* кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Признаки делимости на 11

Число 134* кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Можем ли мы по аналогии сформулировать признак делимости на 27?

Признаки делимости на 11

Число 134* кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки?

Делимость на 3 и 9

Число делится на 3 и 9 в том и только том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3 и 9.

Сумма первых трёх цифр равна 8. При добавлении * мы должны получить результат делящийся на 3, то есть 9, 12 или 15. Значит на месте * могут стоять только цифры 1, 4 или 7.

Признаки делимости на 2^n и 5^n

Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число 314159*6 кратно 8?

Делимость на 2^n и 5^n

Число делится на 2^n и 5^n в том и только том случае, число составленное из последних n цифр этого числа делится на 2^n и 5^n.

Признаки делимости на 2^n и 5^n

Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число 314159*6 кратно 8?

Делимость на 2^n и 5^n

Число делится на 2^n и 5^n в том и только том случае, число составленное из последних n цифр этого числа делится на 2^n и 5^n.

Признаки делимости на 2^n и 5^n

Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число 314159*6 кратно 8?

Делимость на 2^n и 5^n

Число делится на 2^n и 5^n в том и только том случае, число составленное из последних n цифр этого числа делится на 2^n и 5^n.

Верен ли этот признак в других системах счисления?

Количество натуральных делителей числа

Theorem

Количество натуральных делителей числа

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

может быть найдено по формуле

$$N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

Доказательство.

Любой делитель может быть представлен как $M = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где β_i принимает значения от 0 до α_i (всего $\alpha_i + 1$) вариант. □

Количество натуральных делителей числа

Theorem

Количество натуральных делителей числа

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

может быть найдено по формуле

$$N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

Доказательство.

Любой делитель может быть представлен как $M = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где β_i принимает значения от 0 до α_i (всего $\alpha_i + 1$) вариант. $\square$

Сумма натуральных делителей числа

Theorem

Сумма натуральных делителей числа

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

может быть найдено по формуле

$$N = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

Доказательство этой теоремы требует аккуратной группировки делителей. Подумайте над ним.

Сумма натуральных делителей числа

Доказательство.

1. Если в разложение входит только один простой множитель, то все делители легко выписать: $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$. Их сумма может быть найдена как сумма геометрической прогрессии. Она равна $(p^{\alpha+1} - 1)/(p - 1)$, что соответствует теореме.
2. Сгруппируем делители по степени в которой в разложение входит первый простой множитель.
3. Группировка по каждому из множителей и даёт требуемую формулу.

□